基于 Dice 匹配的 SWOMP 压缩感知重构算法

王顶, 吴玥瑶, 曹旺辉, 徐军

(西北工业大学 电子信息学院, 陕西 西安 710129)

摘 要:传统的分段弱正交匹配追踪(SWOMP)重构算法在重构信号时,由于采用了内积匹配准则,观测矩阵中任意 2 个相似的原子都会影响残差信号的匹配过程,降低信号重构质量。利用 Dice 系数匹配度量准则,优化了支撑集的选择,降低了相似原子对匹配过程的影响。仿真结果证明:在相同的条件下,与传统的 SWOMP 算法相比,优化后的基于 Dice 系数的分段弱正交匹配追踪(Dice-SWOMP)算法具有更小的恢复残差以及更高的信号重构成功率。

关 键 词:压缩感知;重构算法;SWOMP 算法;Dice 系数

中图分类号:TP391.9 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-2758(2017)05-0774-06

传统的信号采样遵循奈奎斯特采样定理,否则将可能出现混叠现象[1],从而严重影响信号的恢复。若要高质量地重构出原始信号需要很高的采样速率,但这样会产生大量的信息冗余,浪费资源。

近年来,华裔科学家陶哲轩等人提出了压缩感知理论[2]。与奈奎斯特采样理论相比,该理论在采样端将信号采样和压缩过程并行处理,可以保证不会丢失太多原始信号的关键信息[3]。压缩感知理论由信号稀疏表示、观测矩阵及重构算法 3 个核心部分组成[4],其中重构算法尤为重要,它决定着压缩感知理论是否实际可行。目前,压缩感知重构算法主要分为以下 3 类:贪婪算法、凸优化算法及组合算法,其中分段弱正交匹配追踪(SWOMP)算法是贪婪算法中最具代表性的算法之一。

传统的 SWOMP 算法采用内积准则度量方法,通过计算向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的夹角余弦值来描述 2 个向量的相似性[5],但用该算法重构信号时,观测矩阵中任意 2 个相似的原子都会影响残差信号的匹配过程,从而导致原始信号部分信号丢失。针对上述缺点,本文将引入 Dice 系数匹配度量准则,更好地从冗余字典中选择最佳匹配因子,从而有效地改善内积准则方法在匹配过程中原始信号部分丢失的问题。

1 SWOMP 算法原理

1.1 压缩感知理论

压缩感知理论表明:假设有一个长度为 N 的一维离散时间信号,若该信号稀疏或者在某一正交基上能稀疏表示,那么将该稀疏信号投影到另一个与正交基不相干的观测矩阵上,得到观测值,再通过观测值的传输和逆稀疏过程,便可以精确重构原始信号[6]。

如果在时域上不稀疏的信号可以在某个可逆的基上进行投影,然后得到稀疏信号,那么就满足了应用压缩感知理论的前提。而这一投影过程被称为信号的稀疏表示:

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Psi\beta} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N]$ 是权重系数向量,$\boldsymbol{\Psi} = [\Psi_1, \Psi_2, \cdots, \Psi_N]$ 表示稀疏基,满足 $\boldsymbol{\Psi\Psi}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{I}$;若 $\boldsymbol{\Psi}$ 中只有 K 个非零的值,另外 $N - K$ 个值等于零,且 K 远远小于 N,那么就可以把 $\boldsymbol{X}$ 看作是 K 维稀疏的信号[7]。

在用稀疏表示获取 K 维稀疏的信号后对信号进行观测,也就是利用 $M \times N$ 维的观测矩阵实行线性转换,从而获得 M 维的观测向量 y:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Phi X} = \boldsymbol{\Phi\Psi\beta} = \boldsymbol{\Theta\beta} \tag{2}$$

收稿日期:2017-02-12 **基金项目**:国家自然科学基金(61271279)与国家 863 计划项目(2015AA01A704)联合资助

作者简介:王顶(1973—),西北工业大学副教授,主要从事宽带无线通信及抗干扰通信研究。

式中,$\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{\Phi\Psi}$,$\boldsymbol{\Theta}$ 为传感矩阵。观测就是把维度个数为 N 的初始信号 $\boldsymbol{X}$ 通过观测矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 以后,获得维度个数等于 M 的观测向量 $\boldsymbol{y}$,以便重构出维度个数为 N 的重构信号 $\hat{\boldsymbol{X}}$。

信号重构是压缩感知的最后一个环节,Candes 等人于 2006 年证明了压缩感知理论中的信号 $\boldsymbol{X}$ 可以通过求解最小 1_0 范数重构出:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\min\|\boldsymbol{\beta}\|_0$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi X}=\boldsymbol{\Phi\Psi\beta} \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{X}$ 是待重构信号,$\boldsymbol{y}$ 是观测以后获取的信号,$\|\boldsymbol{\beta}\|_0$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的 1_0 范数,也就是 $\boldsymbol{\beta}$ 内不等于零的值的个数。

理论证明,在满足稀疏变换基与观测矩阵不相关的前提下,求解最小 1_1 范数和求解最小 1_0 范数是等价的[8],而且前者是凸优化问题,可以转化成线性规划问题求解,即:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\min\|\boldsymbol{\beta}\|_1$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi X}=\boldsymbol{\Phi\Psi\beta} \tag{4}$$

目前针对 1_0 范数最小化的一系列贪婪算法中具有代表性的算法有 OMP 算法、ROMP 算法、SWOMP 算法等重构算法[9]。

1.2　SWOMP 算法的内积准则度量法

SWOMP 算法按照信号重构残差值确定选择原子的最低标准,构造出候选集,再利用正交化候选集选出用来描述信号的原子,将其存入支撑集中。在候选集是空集的情况下,选取相关因子最高的原子进入支撑集,最后将支撑集内的元素通过求最小二乘法完成信号的趋近以及残差值的更换。

传统的 SWOMP 算法按照内积准则度量方法的要求,将冗余字典库中选择的最优因子用于架构或者更改索引集矩阵,然后与信号的残差值进行匹配,假定索引集矩阵为 $\boldsymbol{\Omega}$,公式的步骤如下:

1) 组建索引集矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$,s.t.$vi\in\boldsymbol{\Omega}(vj\notin\boldsymbol{\Omega})$

2) $|\ \mathrm{sim}(\varphi_i,r)\ |\geqslant|\ \mathrm{sim}(\varphi_j,r)\ |\ (\varphi_{i,j}\in\boldsymbol{\Omega})$

在上式中,sim( ) 函数表示2个向量之间的相似度,r 表示残差值,φ 表示冗余字典中的因子,挑选 φ 存在于索引集矩阵 $\boldsymbol{\Omega}$ 中。

内积准则为:$g^K=\mathrm{argmax}|<\boldsymbol{\Phi}_i^T,r^{K-1}>|$

其中 g 代表当前迭代过程中与残差值最相似的因子,$\boldsymbol{\Phi}$ 表示冗余字典库集合。内积方法计算出来的绝对值越大,说明残差值和挑选的因子两向量越相似。

SWOMP 算法重建原始信号时,应用内积准则度量相似度的实质是通过计算从冗余字典库中寻找到的匹配因子与残差值的夹角余弦值。夹角余弦值越大,夹角越小,2 个向量越相似。对任意 2 个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$,内积匹配准则为:

$$\mathrm{sim}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>}{\|\boldsymbol{x}\|\cdot\|\boldsymbol{y}\|}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2}} \tag{5}$$

信号重构的实质是对最优因子索引集矩阵进行重构计算。SWOMP 算法是按照内积准则对原始信号进行重构,很难从冗余字典库中挑选出适合残差值信号的最优因子,不易达到较高的还原性能,因此如何在算法中挑选出与残差值匹配的最优因子索引集矩阵是一个重要的问题。为了发现索引集矩阵,提升 SWOMP 算法的重构性能,需要寻找一种更好的方法来挑选与残差值匹配的最优因子。

2　基于 Dice 系数匹配准则的 SWOMP 算法

2.1　Dice 系数匹配准则

SWOMP 算法重构信号时,在每次迭代过程中都需要重新确定残差信号的组成元素,并从冗余字典中选出与残差信号匹配的最佳原子。利用内积准则度量相似性时,分母是对向量分量的平方和求几何平均值,不能很好地保留每个向量分量的原始状态,进而会影响对相似原子的区分,使观测矩阵中任意 2 个相近似的原子都可能会影响残差信号的匹配过程,导致部分原始信号丢失,降低信号的重构质量。为解决这一问题,引入 Dice 系数,对任意 2 个向量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$,Dice 系数的定义为:

$$Dice(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\frac{2\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2} \tag{6}$$

Dice-SWOMP 算法与传统的 SWOMP 算法的不同点就在于它引入了 Dice 系数作为衡量匹配的准则,优化后的算法如下:

$$i^K=\mathrm{argmax}|\ D(\boldsymbol{\Phi}^K,r^{K-1})\ | \tag{7}$$
$$\boldsymbol{\Omega}^K=\boldsymbol{\Omega}^{K-1}\cup\{i^K\} \tag{8}$$

由此可知,Dice-SWOMP 算法在每一次迭代时

都需要重新计算所有冗余的匹配因子与残差值的相似度。利用 Dice 系数匹配准则度量相似性时,分母是对向量分量的平方和求算术平均值,与几何平均值相比,算数平均数能更多地保留每个向量的原始特征,突出向量的组成元素。针对任意 2 个向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$,Dice 系数均可最大化的有效运用向量中的各个数值来求解相关性,解决了几何平均值方法在匹配过程中导致原始信号部分丢失的问题。因此相对于内积准则,在原子间相关性较高的字典中,Dice-SWOMP 算法可以更显著地区分 2 个相似的原子,更好地从冗余字典中挑选出与残差向量匹配的原子,极大地提升了信号的重构性能。

2.2 基于 Dice 系数的分段弱正交匹配追踪(Dice-SWOMP)算法流程

Dice-SWOMP 算法的具体步骤如下:

1)初始化 $r_0 = y$, $\Lambda_0 = \phi, A_0 = \phi, t = 1$;

2) 计算 $u = abs[D(A^{\mathrm{T}}, r_{t-1})]$,选取 u 内大于门限 T_h 的值,把这些结果相应 A 的列序号 j 组成集 J_0,即 J_0 列序号集;

3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup J_0, A_t = A_{t-1} \cup a_j$(for all $j \in J_0$);若 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1}$,也即无新列被选中,则停止迭代进入第 7) 步;

4) 求 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{\beta}_t$ 的最小二乘解:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \operatorname{argmin} \| \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}_t\boldsymbol{\beta}_t \| = (\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_t)^{-1}\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

5)更新残差 $r_t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}_t\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}_t(\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$;

6)$t = t + 1$,如果 $t \leqslant K$,则返回第 2) 步继续迭代;如果 $t > K$ 或者残差 $r_t = 0$,那么终止重复代入直接进行第 7) 步;

7) 重构所得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 在 Λ_t 处有非零项,其值为最后一次迭代所得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_t$;

其中,r_t 代表残差,t 代表迭代次数,传感矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi\Psi}$,$K$ 代表信号的稀疏度,$\boldsymbol{\Phi}$ 代表空集, Λ_t 代表 t 次重复代入的索引(列序号) 集,λ_t 表示 t 次迭代找到的索引(列序号),a_j 表示矩阵 A 的第 j 列,信号稀疏表示系数估计 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$,$\boldsymbol{A}_t$ 表示按索引选出的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列集合(大小为 $M \times t$ 的矩阵),$\boldsymbol{\beta}_t$ 为 $t \times 1$ 的列向量。获得 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 以后,通过 $\hat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{\Psi}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 重建信息;门限 $T_h = \alpha\max(abs(u))$,其中 α 取值范围一般为 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$;本算法的重复代入个数为信息的稀疏度值 K;因为信号的稀疏表示模型为 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Psi\beta}$,所以传感矩阵 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Phi\Psi}$; $\cup$ 表示集合并运算。

3 实验结果与分析

实验平台基于 MATLAB R2014a, Windows7 操作系统。CPU 选用奔腾 3558u 双核处理器,主频 1.7G,内存 4GB。本节通过仿真实验得出了 SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法在重构性能上的对比图,评估了 SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法在以下几个方面的性能: ①单次重构的恢复残差;②在稀疏度一定时,信号在不同观测维数下的重构成功概率;③在观测维数一定时,信号在不同稀疏度下的重构成功概率。

信号重构成功率定义为:

$$\text{重构成功率} = \frac{\text{信号重构的次数}}{\text{测试的次数}}$$

3.1 2 种重构算法的单次重构仿真

实验利用 SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法分别从观测矩阵中选取匹配原子,并比较了 2 种不同重构算法对信号恢复残差的影响。对长度为 $N = 256$,稀疏度 $K = 12$,观测维数 $M = 128$ 的信号进行重构,取 $M \times N$ 的高斯随机矩阵作为观测矩阵。

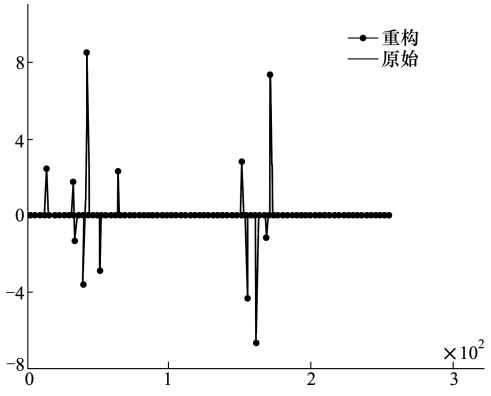


图 1 SWOMP 算法单次重构

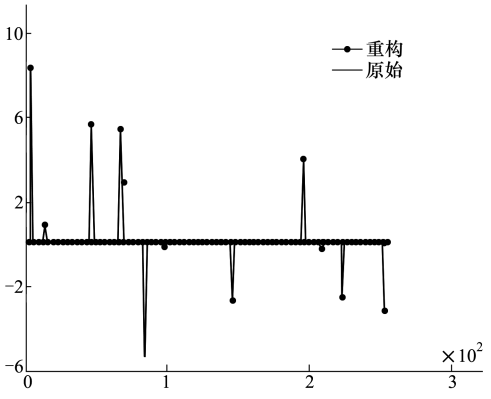


图 2 Dice-SWOMP 算法单次重构

表 1　Dice-SWOMP 算法单次重构仿真的恢复残差

压缩感知重构算法	单次重构恢复残差
SWOMP	$5.735\ 1\times10^{-15}$
Dice-SWOMP	$2.929\ 0\times10^{-15}$

通过对比图 1、图 2 及表 1 中 2 种不同算法的仿真结果可知:与传统的 SWOMP 算法相比,优化后的 Dice-SWOMP 算法具有更小的单次重构恢复残差,重构精度更高。

3.2　不同投影维数下的信号重构成功率

实验比较了当稀疏度一定时,SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法在不同观测维数下的重构成功率。取信号长度 $N = 256$,观测维数 M,稀疏度 K,并采用高斯随机矩阵作为观测矩阵。在每个测试点 (K,M) 上,重复实验 1 000 次,以便观察在不同观测维数 M 下的信号重构成功率。

图 3 和图 4 分别为当选取若干稀疏度 K 值时,Dice-SWOMP 算法与 SWOMP 算法在不同观测维数 M 值下的重构成功率。当稀疏度 K 值一定时,随着观测维数 M 的增加,Dice-SWOMP 算法与 SWOMP 算法的信号重构成功概率均在逐渐增加;当观测维数 M 值一定时,随着稀疏度 K 值的增加,Dice-SWOMP 算法与 SWOMP 算法的重构成功概率均在逐渐减小;当重构概率达到 1 时,随着稀疏度 K 值的不断变大,Dice-SWOMP 算法与 SWOMP 算法所需要的观测维数均在不断增加。

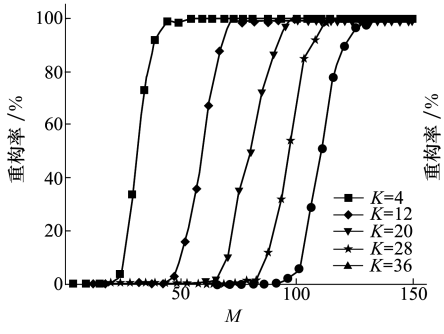


图 3　SWOMP 算法

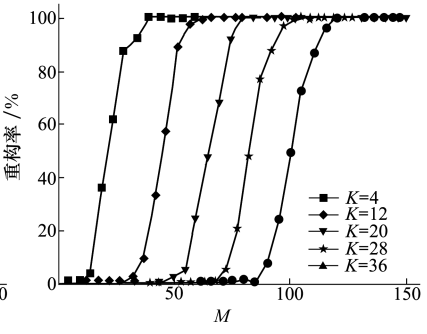


图 4　Dice-SWOMP 算法

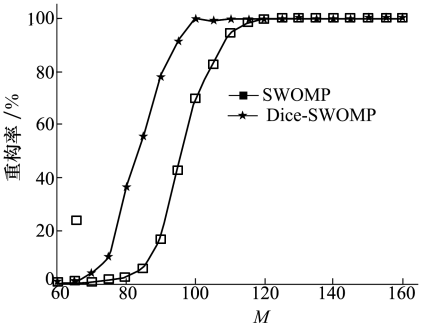


图 5　SWOMP 与 Dice-SWOMP 算法在不同观测维数 M 下的重构成功率

如图 5 所示,当稀疏度 $K = 20$,仿真验证了 2 种算法下观测维数 M 和重构成功率的关系。由仿真结果可知,随着观测维数 M 逐渐的增大,SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法的信号重构成功率均在逐渐增大。在观测维数 M 相同的情况下,与 SWOMP 算法相比,Dice-SWOMP 算法具有更高的重构成功率。当重构概率达到 1 时,相比 SWOMP 算法,Dice-SWOMP 算法所需的观测维数 M 更少。

3.3　稀疏信号在不同稀疏度下的重构成功率

实验比较了当观测维数一定时,SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法在不同稀疏度下的重构成功率。实验中取信号长度 $N = 256$,观测维数 M,稀疏度 K,采用的观测矩阵为高斯随机观测矩阵。在每一个测试点 (K,M) 上,重复实验 1 000 次,以便观察在不同稀疏度 K 下的信号重构成功率。

图 6 和图 7 分别为选取若干观测维数 M 值,SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法在不同稀疏度 K 下的重构成功率。由仿真结果可知:当观测维数 M 值一定时,随着稀疏度的增加,SWOMP 算法和 Dice-SWOMP 算法的信号重构成功概率均在逐渐减小;当稀疏度 K 值一定时,随着观测维数 M 的增加,SWOMP 算法和 Dice-SWOMP 算法的重构成功概率在逐渐增大;当重构概率达到 1 时,随着观测维数 M 的不断变大,SWOMP 算法和 Dice-SWOMP 算法所能适应的稀疏度 K 也在不断增加。

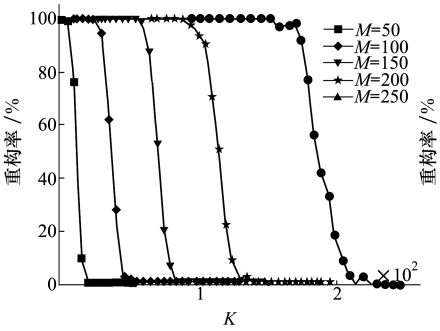


图 6 SWOMP 算法

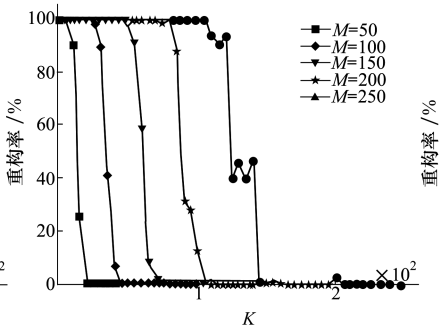


图 7 Dice-SWOMP 算法

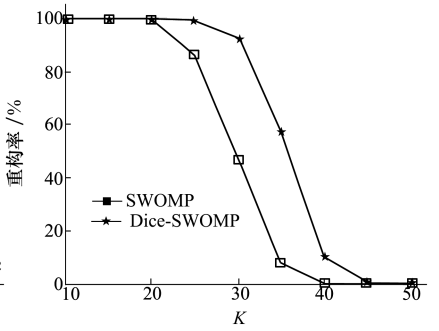


图 8 观测维数 $M=100$,2 种算法在不同稀疏度 K 下的重构成功率

如图 8 所示,当观测维数 $M=100$ 时,仿真验证了在 2 种算法下稀疏度 K 和信号重构成功率的关系。由仿真结果可知,随着稀疏度 K 不断增加,SWOMP 算法与 Dice-SWOMP 算法的信号重构成功率均逐渐减少。当稀疏度 K 一定时,与 SWOMP 算法相比,Dice-SWOMP 算法具有更大的重构成功率。当重构概率等于 1 时,相比 SWOMP 算法,Dice-SWOMP 算法所能适应的稀疏度 K 更大。

4 结 论

本文在传统的 SWOMP 算法基础上,引入了 Dice 系数匹配准则后,在原子间相关性较高的字典中,能更好地辨别 2 个相似的原子并挑选出与残差信号匹配的最佳原子,从而提高信号的恢复质量。通过仿真实验可知,在相同的条件下,与 SWOMP 算法相比,Dice-SWOMP 算法具有更小的恢复残差以及更高的信号重构成功率。

参考文献:

[1] 焦李成,杨淑媛,刘芳,侯彪. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报,2011,7(39):1651-1662
Jiao Licheng, Yang Shuyuan, Liu Fang, Hou Biao. Development and Prospect of Compressive Sensing[J]. Acra Electronica Sinica,2011,7(39): 1651-1662 (in Chinese)

[2] 杨海蓉,张成,丁大为,韦穗. 压缩传感理论与重构算法[J]. 电子学报,2011,39(1): 142-148
Yang Hairong, Zhang Cheng, Ding Dawei, Wei Sui. The Theory of Compressed Sensing and Reconstruction Algorithm[J]. Acra Electronica Sinica,2011,39(1): 142-148 (in Chinese)

[3] Gao R,Zhao R Z,Hu S H. Variable Step Size Adaptive Matching Pursuit Algorithm for Image Reconstruction Based on Compressive Sensing[J]. Acta Optica Sinica,2010,30(6):1639-1644

[4] Baraniuk R G, Cevher V, Duarte M F, et al. Model-Based Compressive Sensing[J]. IEEE Trans on Information Theory,2010, 56(4): 1982-2001

[5] Jacques L, Laska J N, Boufounos P T, et al. Robust 1-bit Compressive Sensing via Binary Stable Embeddings of Sparse Vectors [J]. IEEE Trans on Information Theory, 2013,59(4): 2082-2102

[6] Zhao S, Zhang Q Y, Yang H. Orthogonal Matching Pursuit Based on Tree Structure Redundant Dictionary[J]. Communications in Computer and Information Science, 2011,2:310-315

[7] Karahanoglu N B, Erdogan H. A* Orthogonal Matching Pursuit: Best-First Search for Compressed Sensing Signal Recovery[J]. Digital Signal Processing: A Review Journal,2012,22(4):555-568

[8] Needell D, Vershynin R. Signal Recovery from Incompleteand Inaccurate Measurements via Regularized Orthogonal Matching Pursuit[J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing,2010,4(2): 310-316

[9] 戴琼海,付长军,季向阳. 压缩感知研究[J]. 计算机学报, 2011,34(3):425-434
Dai Qionghai, Fu Changjun, Ji Xiangyang. Research on Compressed Sensing[J]. Chinese Journal Computers,2011,34(3):

425-434 (in Chinese)

Improved Reconstruction Algorithm for Compressed Sensing

Wang Ding, Wu Yueyao, Cao Wanghui, Xu Jun

(School of Electronic and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

Abstract: When reconstructing the signal with the traditional SWOMP reconstruction algorithm, any two similar atoms in the observation matrix will affect the matching process of the residual information and reduce the quality of signal reconstruction due to the use of inner product matching criterion. In this paper, the Dice coefficient matching metric is used to optimize the selection of the support set and reduce the impact of similar atom on the matching process. Finally, the simulation results show that the optimized Dice-SWOMP algorithm based on the Dice coefficient has smaller recovery residuals and higher signal reconstruction success rate than the SWOMP algorithm under the same conditions.

Keywords: compressed sensing; reconstruction algorithm; SWOMP algorithm; Dice coefficient