基于相关变量分解的重要性测度分析新方法

郝文锐，吕震宙，田龙飞

(西北工业大学 航空学院，陕西 西安 710072)

摘 要：为了清晰地掌握相关输入变量情况下响应量方差的来源，有必要将重要性测度分离为相关部分和独立部分。通过将相关变量构造为独立变量的线性组合，相关输入变量对功能响应的方差贡献可被分离为相关部分和非相关部分，提出线性响应量情况下基于相关变量分解的重要性测度分析方法。所提方法不仅能将某一相关变量对响应的方差贡献分解为独立部分和相关部分，还可将其相关贡献分离为其与每一相关变量间的相关贡献分量。在此基础上针对非线性响应量的情况建立了基于迭代一阶泰勒展开的重要性求解方法，该方法可在响应的一阶泰勒展开式的方差与原响应方差基本一致的情况下对相关变量进行重要性测度求解。采用所提方法，对文中数值算例和工程应用算例中各相关输入变量的相关部分和独立部分的重要性测度指标进行了求解，证明了文中提出的基于相关变量分解的重要性测度方法是合理、可行的。

关 键 词：灵敏度分析，重要性测度，相关变量分解，泰勒展开，多项式
中图分类号：TB114.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-2758(2012)01-0088-06

随机不确定性通常是由输入数据的随机性引起，并且通过物理模型向输出量传播[1]。基本变量的重要性测度又称为全局灵敏度分析，它可以指出各输入变量的不确定性对模型输出响应不确定性的影响程度大小，继而可以依次确定它们的实验或研究的优先级别[1]。基本变量的重要性测度为有针对性地改善结构模型提供了一种可行的新途径。根据基本变量的重要性测度研究的发展状况，一般可将重要性测度模型分为三类：非参模型(相关系数模型)[2,3]、基于方差的模型[4~6]、矩独立模型[7,8]。目前应用较多的是基于方差的模型，它可用以确定各输入变量对响应方差的贡献程度。

文献[9]指出，对于含相关输入变量的模型，应该将某相关输入变量对输出响应的不确定性的影响分为两部分：相关影响(由某输入变量和其他变量的相关部分产生)和非相关影响(某输入变量独立产生)。这样将某变量对输出响应的不确定性的影响进行的分离是非常重要的，因为它可以帮助工程人员决定需要在某变量中更关注其与其它变量的相关部分还是这个变量本身的独立部分。文献[9]中进一步提出了一种基于方差的相关输入变量的重要性测度方法，这种方法建立在回归分析之上，因此计算比较繁琐。本文考虑用其它独立变量的线性组合形式代替相关变量，推导相关输入变量间的相关部分和各自独立部分对输出响应总方差的贡献表达式。本文还针对非线性响应量的情况建立了基于迭代一阶泰勒展开的方法，以在响应的一阶泰勒展开式的方差与原响应方差基本一致的情况下对相关变量进行重要性测度求解。

1 线性响应量情况

1.1 相关变量分解的基本思想

两两相关变量 x_1 与 x_2 的相关性可由下图简单表示。

图 1 体现了相关变量分解的原理，即相关变量 x_1 与 x_2 可被分别分解为其他独立变量的组合形式，

收稿日期：2011-04-21 基金项目：国家自然科学基金(51175425)、航空科学基金(2011ZA53015)、博士学科点专项科研基金(20116102110003)与航天支撑基金(2011XW010001)资助
作者简介：郝文锐(1987—)，西北工业大学硕士研究生，主要从事飞行器可靠性工程的研究。

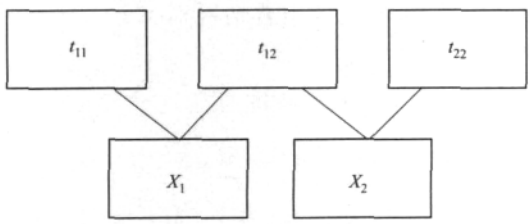


图 1　两两相关变量关系示意图

t_{12} 是它们的共有变量,决定了 x_1 与 x_2 具有相关性,而 t_{11}、t_{22} 分别为 x_1、x_2 的独有部分,决定了 x_1、x_2 也具有各自的独立性。

由上面的描述知 t_{12}、t_{11}、t_{22} 是相互独立的,由于 t_{12} 对 x_1 和 x_2 均有影响,因此可考虑将 x_1 和 x_2 分解为下式。

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}t_{11} + a_{12}t_{12} \\ x_2 = a_{21}t_{21} + a_{22}t_{22} \end{cases} \tag{1}$$

将(1)式代入相关系数定义式,有

$$\rho_{x_1x_2} = \frac{\mathrm{cov}(a_{11}t_{11} + a_{12}t_{12}, a_{21}t_{12} + a_{22}t_{22})}{\sqrt{\mathrm{var}(x_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(x_2)}} \tag{2}$$

因 t_{12}、t_{11}、t_{22} 相互独立,(2)式可简化为

$$\rho_{x_1x_2} = \frac{a_{12}a_{21}\mathrm{var}(t_{12})}{\sqrt{\mathrm{var}(x_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(x_2)}} \tag{3}$$

从(3)式可以看出,将相关变量 x_1、x_2 用独立变量 t_{12}、t_{11}、t_{22} 以(1)式的形式表示后,其相关系数由 x_1、x_2 的共有变量 t_{12} 的方差和系数以及 x_1、x_2 的方差共同决定,且(1)式中的 $a_{11}t_{11}$,$a_{22}t_{22}$ 与 $\rho_{x_1x_2}$ 无关,其作用为在 t_{12} 的方差和系数确定后使独立变量的组合与原变量服从同一分布,因此为了表达的简洁和计算的方便,可令

$$a_{11} = a_{22} = 1 \tag{4}$$

则

$$\begin{cases} x_1 = t_{11} + a_{12}t_{12} \\ x_2 = a_{21}t_{21} + t_{22} \end{cases} \tag{5}$$

这样,在已知 x_1 和 x_2 的方差和相关系数 $\rho_{x_1x_2}$ 的情况下,需要首先合理确定 t_{12} 的系数和分布参数(在满足(3)式的情况下 $a_{12}a_{21}\mathrm{var}(t_{12})$ 还须小于 $\mathrm{var}(x_1)$ 和 $\mathrm{var}(x_2)$ 中的较小值),然后再根据 x_1 和 x_2 的分布参数确定 t_{11}、t_{22} 的分布参数。

对于线性响应量函数,例如

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \tag{6}$$

式中 a_0 为常数项。采用(5)式表示相关变量 x_1、x_2 后,响应量可被表示为

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1(t_{11} + a_{12}t_{12}) + a_2(a_{21}t_{12} + t_{22}) \\ &= a_0 + a_1t_{11} + a_1a_{12}t_{12} + a_2a_{21}t_{12} + a_2t_{22} \end{aligned} \tag{7}$$

因为 t_{12}、t_1、t_2 是相互独立的变量,输出响应的总方差 $V(y)$ 为

$$\begin{aligned} V(y) = {} & (a_1a_{12} + a_2a_{21})^2\mathrm{var}(t_{12}) + \\ & a_1^2\mathrm{var}(t_{11}) + a_2^2\mathrm{var}(t_{22}) \end{aligned} \tag{8}$$

1.2　线性响应量情况下基于相关变量分解的重要性测度分析

1.2.1　两个相关变量的情况

(6)式中 x_1 对输出响应方差的独立贡献为

$$V_1^{\mathrm{U}} = \mathrm{E}[\mathrm{var}(a_1x_1 \mid x_2)] \tag{9}$$

将用独立变量表达的 x_1 和 x_2 代入(9)式,并由 t_{12} 和 t_1 独立,有

$$\begin{aligned} V_1^{\mathrm{U}} = {} & \mathrm{E}\{\mathrm{var}[a_1a_{12}t_{12} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} + \\ & \mathrm{E}\{\mathrm{var}[a_1t_{11} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} \end{aligned} \tag{10}$$

利用总方差公式,即

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{var}(X \mid Y)) + \mathrm{var}(\mathrm{E}(X \mid Y)) \tag{11}$$

可将(10)式右边第一项表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\mathrm{var}[a_1a_{12}t_{12} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} = {} & \mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12}) - \\ & \mathrm{var}\{\mathrm{E}[a_1a_{12}t_{12} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} \end{aligned} \tag{12}$$

并由于 t_{11} 和 t_{12}、t_{22} 独立,(10)式右边第二项可简化为

$$\mathrm{E}\{\mathrm{var}[a_1t_{11} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} = \mathrm{var}(a_1t_{11}) \tag{13}$$

对(12)式右边第二项利用相关系数平方定理,即

$$\frac{\mathrm{var}(\mathrm{E}(X \mid Y))}{\mathrm{var}(X)} = \rho_{X,Y}^2 \tag{14}$$

式中 $\rho_{X,Y}$ 代表相关随机变量 X 和 Y 的相关系数。并利用相关系数与协方差的关系,可得到

$$\begin{aligned} \mathrm{var}\{\mathrm{E}[a_1a_{12}t_{12} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} = {} & \mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12}) \cdot \\ & \left[\frac{\mathrm{cov}(a_1a_{12}t_{12}, a_{21}t_{12} + t_{22})}{\sqrt{\mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12})}\sqrt{\mathrm{var}(a_{21}t_{12} + t_{22})}}\right]^2 \end{aligned} \tag{15}$$

将(15)式代入(12)式,并利用 t_{22} 与 t_{12} 独立的条件、协方差公式以及(5)式,(12)式可简化为

$$\begin{aligned} & \mathrm{E}\{\mathrm{var}[a_1a_{12}t_{12} \mid (a_{21}t_{12} + t_{22})]\} \\ = {} & \mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{21}t_{12})}{\mathrm{var}(x_2)}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

将(13)式和(16)式代入(10)式最终可得 x_1 对输出响应方差的独立贡献 V_1^{U} 如下

$$V_1^{\mathrm{U}} = \mathrm{var}(a_1t_{11}) + \mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{21}t_{12})}{\mathrm{var}(x_2)}\right] \tag{17}$$

从(17)式可以看出,虽然 t_{11} 是 x_1 中独立部分,但 a_1t_{11} 对响应方差的贡献 $\mathrm{var}(a_1t_{11})$ 并不是 x_1 对响应方差独立贡献的全部,其方差独立贡献还有一部分来自于 x_1 与 x_2 相关的部分也即来源于方差 $\mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12})$,且所占比例为1减去与 x_1 相关的变量 x_2 中相关部分 $a_{21}t_{12}$ 的方差 $\mathrm{var}(a_{21}t_{12})$ 在 x_2 的方差 $\mathrm{var}(x_2)$ 中的比例。

同理,x_2 对输出响应的方差的独立贡献为

$$V_2^{\mathrm{U}} = \mathrm{var}(a_2t_{22}) + \mathrm{var}(a_2a_{21}t_{12}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{12}t_{12})}{\mathrm{var}(x_1)}\right] \tag{18}$$

则相关部分 t_{12} 总贡献 $(a_1a_{12} + a_2a_{21})^2\mathrm{var}(t_{12})$ 减去 t_{12} 的贡献中属于 x_1 和 x_2 独立贡献的部分后即为 x_1 与 x_2 对输出响应的方差的相关贡献

$$\begin{aligned} V_{1,2}^{\mathrm{C}} = {} & (a_1a_{12} + a_2a_{21})^2\mathrm{var}(t_{12}) - \\ & \mathrm{var}(a_1a_{12}t_{12}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{21}t_{12})}{\mathrm{var}(x_2)}\right] - \\ & \mathrm{var}(a_2a_{21}t_{12}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{12}t_{12})}{\mathrm{var}(x_1)}\right] \end{aligned} \tag{19}$$

求得相关输入变量对响应量方差贡献的各个部分后,就可使用它们与输出响应量的总方差 $V(y)$ 的比值作为相关输入变量各部分的基于方差的重要性测度,例如 x_1 独立、x_2 独立以及 x_1 和 x_2 相关的重要性测度分别为

$$S_1^{\mathrm{U}} = \frac{V_1^{\mathrm{U}}}{V(y)},\ S_2^{\mathrm{U}} = \frac{V_2^{\mathrm{U}}}{V(y)},\ S_{1,2}^{\mathrm{C}} = \frac{V_{1,2}^{\mathrm{C}}}{V(y)} \tag{20}$$

1.2.2 相关变量分解参数对结果的影响

使用(5)式表示 x_1 和 x_2 时,有多种系数和分布参数的组合情况,但在满足原相关输入变量的相关系数和分布的情况下,各部分方差贡献的结果不随(5)式中独立变量的系数和分布的变化而改变,理由如下:

由(17)式可得

$$V_1^{\mathrm{U}} = a_1^2\left[\mathrm{var}(t_{11}) + \mathrm{var}(a_{12}t_{12})\left(1 - \frac{a_{21}^2\mathrm{var}(t_{12})}{\mathrm{var}(x_2)}\right)\right] \tag{21}$$

利用(5)式,(21)式可进一步写为

$$V_1^{\mathrm{U}} = a_1^2\left[\mathrm{var}(x_1) - \frac{a_{12}^2a_{21}^2\mathrm{var}^2(t_{12})}{\mathrm{var}(x_2)}\right] \tag{22}$$

根据(3)式,(22)式可表示为 $V_1^{\mathrm{U}} = (1 - \rho_{x_1x_2}^2)\,\mathrm{var}(a_1x_1)$,说明 V_1^{U} 的计算结果不随(1)式中独立变量的系数和分布的不同而改变。同理可证明(18)、(19)式的结果符合同样的性质。因此(5)式中系数和分布参数的组合情况对(20)式代表的重要性测度的结果没有影响。

1.2.3 多个相关变量的情况

响应函数为 $y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_ix_i$,其中某一输入变量 $x_k(k \leqslant n)$ 与多个变量相关,当不考虑 $n(n \geqslant 3)$ 个两两相关变量的公共相关部分时,设

$$x_k = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ik}t_{ik} + \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}t_{kj} + t_{kk} \tag{23}$$

式中与 x_k 不相关的变量的下标与 k 组合构成新下标的参数系数为零,而与(5)式相同的原因 t_{kk} 的系数为1。

根据上面的规律,x_k 对响应方差的独立贡献为 t_{kk} 的贡献加上相应比例的各相关部分的贡献,即

$$\begin{aligned} V_k^{\mathrm{U}} = {} & \mathrm{var}(a_kt_{kk}) + \\ & \sum_{i=1}^{k-1}\left\{\mathrm{var}(a_ka_{ki}t_{ik})\left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{ik}t_{ik})}{\mathrm{var}(x_i)}\right]\right\} + \\ & \sum_{j=k+1}^{n}\left\{\mathrm{var}(a_ka_{kj}t_{kj})\left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{jk}t_{kj})}{\mathrm{var}(x_j)}\right]\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

x_k 与某一相关变量 $x_m(m \leqslant n, m \neq k)$ 对响应方差的相关贡献为

$$\begin{aligned} V_{k,m}^{\mathrm{C}} = {} & \mathrm{var}\left[(a_ka_{km} + a_ma_{mk})t_{km}\right] - \\ & \mathrm{var}(a_ka_{km}t_{km}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{mk}t_{km})}{\mathrm{var}(x_m)}\right] - \\ & \mathrm{var}(a_ma_{mk}t_{km}) \cdot \left[1 - \frac{\mathrm{var}(a_{km}t_{km})}{\mathrm{var}(x_k)}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

上式为 $m > k$ 时的写法,若 $m < k$,则 $V_{k,m}^{\mathrm{C}}$、a_{km} 和 t_{km} 分别写为 $V_{m,k}^{\mathrm{C}}$、a_{mk} 和 t_{mk}。

x_k 对响应方差的相关贡献约为 x_k 与其他变量的相关贡献之和,即

$$V_k^{\mathrm{C}} \approx \sum_{i=1}^{k-1} V_{i,k} + \sum_{j=k+1}^{n} V_{k,j} \tag{26}$$

x_k 独立、x_k 与 x_m 相关、x_k 相关的基于方差的重要性测度分别为

$$S_k^{\mathrm{U}} = \frac{V_k^{\mathrm{U}}}{V(y)},\ S_{k,m}^{\mathrm{C}} = \frac{V_{k,m}^{\mathrm{C}}}{V(y)},\ S_k^{\mathrm{C}} = \frac{V_k^{\mathrm{C}}}{V(y)} \tag{27}$$

1.3 基于相关变量分解的重要性测度方法与基于线性回归的方法的比较

本节提出的基于相关变量分解的重要性测度方法从最基本的数学公式出发,推导出新的独立变量表达的贡献分解公式,在不考虑 $n(n \geqslant 3)$ 个两两相关变量的公共相关部分时,使用其求解的相关变量各部分的重要性测度结果是精确的。文献[9]的基

于线性回归的方法是一种近似的方法,准确度随样本数的增加而提高,由于多次回归分析而使计算量较大。将相关变量分解后,新的形式使相关和独立部分更加直观,计算上也比基于线性回归的方法方便。当某变量与多个其它变量相关时,此种方法不仅能够将某变量对响应方差的独立和相关贡献分离,还可求得此变量与任一其它变量的相关贡献。但和基于线性回归的方法一样,只适用于响应函数为线性或近似线性效果很好的情况。

2　非线性响应量情况

2.1　方法的基本思想与实现步骤

对非线性的响应函数表达式进行一阶泰勒展开可以达到线性化的目的。由于本文探讨的是各相关输入变量对输出响应量的变异性即方差的影响,因此在对原响应函数表达式进行泰勒一阶展开时,应该通过对插值点的选取来控制此泰勒展开式输出的总方差,使其与原响应函数输出的总方差基本一致,具体步骤为:

1) 计算原响应函数表达式 $y = g(x)$ 输出的总方差 $\mathrm{var}(y)$。

2) 将原响应函数表达式 $y = g(x)$ 在输入变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的均值点 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 处进行一阶泰勒展开,即

$$\bar{y}^{(1)} = g(\mu) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{x=\mu} (x_i - \mu_i) \quad (28)$$

求得 (28) 式输出的总方差 $\mathrm{var}(\bar{y}^{(1)})$ 后,记

$$e^{(1)} = \mathrm{var}(y) - \mathrm{var}(\bar{y}) \quad (29)$$

3) 将原响应函数表达式 $y = g(x)$ 在输入变量 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的均值点 μ 附近即 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*) = (\mu_1 + \Delta\mu_1, \mu_2 + \Delta\mu_2, \cdots, \mu_n + \Delta\mu_n)$ 处进行一阶泰勒展开,即

$$\bar{y}^{(2)} = g(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{x=x^*} (x_i - x_i^*) \quad (30)$$

求得 (30) 式输出的总方差 $\mathrm{var}(\bar{y}^{(2)})$ 后,记

$$e^{(2)} = \mathrm{var}(y) - \mathrm{var}(\bar{y}) \quad (31)$$

4) 对 $(\mu, e^{(1)})$ 和 $(x^*, e^{(2)})$ 两点进行线性插值得到使 $e^{(3)} \approx 0$ 的点 $(x', e^{(3)})$。

5) 检验 $e^{(3)}$ 是否接近于零,若不满足,返回首个步骤进行迭代,直至 $e^{(3)}$ 收敛于零。

6) 在 x' 处对原响应函数表达式进行泰勒一阶展开,即

$$\bar{y}^{(3)} = g(x') + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}\bigg|_{x=x'} (x_i - x'_i) \quad (32)$$

7) 将 (32) 式作为新的响应函数表达式,采用文献 [9] 的基于线性回归的方法或本文的基于相关变量分解的方法来计算各相关输入变量对响应方差的独立和相关贡献。

2.2　方法的优缺点分析

一阶泰勒展开是通用的将非线性表达式转化为线性表达式的方法,本文提出通过插值点的选取使得响应的一阶泰勒展开式的方差与其原方差基本一致,能更合理地反映各相关输入变量对响应量方差的贡献程度。但由于一阶泰勒展开本身对原式非线性程度的敏感性,在响应量的非线性程度增大时,重要性测度结果的精度也会随之降低。在非线性响应量情况下的另一研究,可参见文献 [10]。

3　算　例

3.1　数值算例

响应函数

$$y = 4x_1 + x_2 \quad (33)$$

式中,x_1 和 x_2 服从标准正态分布,相关系数 $\rho_{12} = 0.7$。

采用本节所述方法,将 x_1 和 x_2 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \sqrt{1.4}t_{12} + t_{11} \\ x_2 = \sqrt{1.4}t_{12} + t_{22} \end{cases}$$

式中 $t_{12} \sim N(0, 0.5)$, $t_{11}, t_{22} \sim N(0, 0.3)$。则

$$y = 4(\sqrt{1.4}t_{12} + t_{11}) + (\sqrt{1.4}t_{12} + t_{22})$$

由 (8) 式可计算得到 $V(y) = 22.6$。由 (17)、(18)、(19) 式计算得到重要性测度的结果列入表 1 后可以看出,基于相关变量分解的重要性测度分析的结果与解析结果完全一致。

表 1　算例 1 基于方差的输入变量重要性测度结果

	V_1^U	$S_1^U(\%)$	V_2^U	$S_2^U(\%)$	$V_{1,2}^C$	$S_{1,2}^C(\%)$
本文方法	8.16	36.11	0.51	2.26	13.93	61.63
解析结果	8.16	36.11	0.51	2.26	13.93	61.63

3.2 悬臂梁结构

如图2所示，一矩形截面悬臂梁受到均布载荷，以其自由端挠度不超过 $L/325$ 为约束建立极限状态函数为 $g(\omega,b,L) = L/325 - \omega bL^4/(8EI)$。式中 ω、b、L、E、I 分别为单位载荷、截面尺寸、梁的长度、弹性模量、截面惯性矩。其中 E 为已知常量，$E = 26$ GPa，I 是 b 的函数为 $I = b^4/12$，L 和 b 的相关系数 $\rho_{Lb} = 1/3$，而 $\rho_{\omega L} = \rho_{\omega b} = 0$，其它分布参数如表2所示。

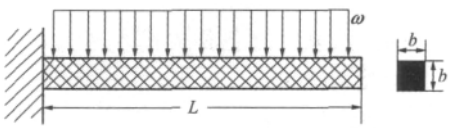


图2 悬臂梁结构简图

表2 输入随机变量的分布参数

变量 x	均值 μ_x	标准差 σ_x	分布类型
ω/(kN·m^{-2})	1000	100	正态
L/m	6	0.9	正态
b/mm	250	37.5	正态

表3 悬臂梁结构基于方差的输入变量重要性测度结果

x_i	$S^{U}_{x_i}$/%	$S^{C}_{x_i}$/%
ω	5.08	0
L	23.78	-20.54
b	91.68	-20.54

对极限状态函数采用基于迭代一阶泰勒展开的方法进行相关变量的重要性测度分析的结果如表3所示，其中 ω 为独立变量，因此其对极限状态函数的方差贡献全部为独立贡献。

从表3的结果可以看出，变量 b 即截面尺寸对极限状态函数的方差贡献所占比例非常大，而 L 和 b 对极限状态函数方差的相关贡献为负，即具有减小方差的作用。因此，从减小极限状态函数的变异性的角度来讲，应该着手减小截面尺寸 b 的独立贡献以及增加梁的长度 L 和截面尺寸 b 的相关性。

4 结 论

在工程实际应用中，将相关输入变量的重要性测度分离为独立部分和相关部分是十分重要的。本文通过将相关变量构造为独立变量的线性组合，推导出线性响应量情况下其对响应量的独立贡献和相关贡献的表达式，并将其相关贡献分离为其与每一相关变量间的相关贡献分量。在此基础上针对非线性响应量的情况建立的基于迭代一阶泰勒展开的方法可在响应的一阶泰勒展开式的方差与原响应方差基本一致的情况下对相关变量进行重要性测度求解。数值算例和工程应用算例中各相关输入变量的相关部分和独立部分的重要性测度结果论证了本文提出的基于相关变量分解的重要性测度方法的合理性。工程应用算例的重要性测度结果也为有针对性地改善其结构模型提供了方向。

参考文献:

[1] Aven T, Nokland T E. On the Use of Uncertainty Importance Measures in Reliability and Risk Analysis. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95(2): 127~133

[2] Doksum K, Samarov A, Nonparametric Estimation of Global Functionals and a Measure of the Explanatory Power of Covariates in Regression. Ann Statist 1995; 23 (5): 1443~1473

[3] Satelli A. The Role of Sensitivity Analysis in the Corroboration of Models and Its Link to Model Structural and Parametric Uncertainty. Reliability Engineering and System Safety, 1997; 57(1): 1~4

[4] Sobol I M. Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates. Mat Comput Simulation, 2001, 55(1): 221~80

[5] Iman R L, Hora S C. A Robust Measure of Uncertainty Importance for Use in Fault Tree System Analysis. Risk Anal, 1990, 10(3): 401~406

[6] Satelli A, Sensitivity Analysis for Importance Assessment. Risk Anal, 2002, 22(3): 579~590

[7] Borgonovo E. A New Uncertainty Importance Measure. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92(6): 771~784

[8] Cui L J, Lu Z Z, Zhao X P. Moment-Independent Importance Measure of Basic Random Variable and Its Probability Density Evolution Solution. Science China Technological Sciences, 2010, 53(4): 1138~1145

[9] Xu Chonggang, George Zdzislaw Gertner. Uncertainty and Sensitivity Analysis for Models with Correlated Parameters. Reliability Engineering and System Safety, 2008, 93(6): 1563 ~ 1573

[10] 郝文税,吕震宙,田龙飞. 基于方差的相关输入变量重要性测度新方法. 航空学报,2011,32(9):1637 ~ 1643
Hao Wenrui, Lu Zhenzhou, Tian Longfei. A Novel Method for Analyzing Variance Based Importance Measure of Correlated Variables. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(9): 1637 ~ 1643 (in Chinese)

A Novel and Rational Method Based on Decomposition of Correlated Variables for Analyzing Importance Measure

Hao Wenrui, Lu Zhenzhou, Tian Longfei
(College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Sections 1 and 2 of the full paper explain the method mentioned in the title, which we believe is novel and rational. Their core consists of. "For exploring the origin of the variance of the output response in the case that correlated input variables are involved, it is necessary to divide the variance based importance measure (VBIM) into the correlated part and the uncorrelated one. Correlated variables are constructed by the linear combination of independent factors to divide the contributions by correlated input variables into correlated ones and uncorrelated ones, by which the novel method based on the decomposition of correlated variables for analyzing importance measure is proposed. The novel method not only can divide the contribution by an individual input variable into uncorrelated one and correlated one, but also can separate the latter into components of the individual input variable correlated with each of other input variables. For nonlinear responses, an iterative first-order Taylor expansion based method is established, which aims at analyzing the importance measure of correlated variables when the variance of response is consistent with its first-order Taylor expansion." The proposed novel method is employed to obtain respectively the VBIMs of two examples. The calculated results, presented in Tables 1 and 3, and their analysis demonstrate preliminarily that the novel method based on the decomposition of correlated variables for analyzing importance measure is indeed rational.

Key words: decomposition, iterative methods, polynomials, probability, regression analysis, reliability, sensitivity analysis; correlated variables, importance measure, Taylor expansion