基于空间系绳系统辅助返回的再入条件计算分析

李爱军[1]，韦汉林[1]，王长青[1]，扎伯罗特诺夫·尤里[2]

（1. 西北工业大学 国际空间系绳系统研究中心，陕西 西安 710072；2. 萨马拉国立航空航天大学，俄罗斯 萨马拉）

摘 要：主要针对空间系绳系统辅助返回的大气层再入条件进行了计算及相关影响因素的分析。首先描述了系绳辅助返回过程，再次建立了系统在轨道坐标系下的动力学模型、舱体回摆模型，给出了再入条件的计算过程。分析了不同轨道高度下绳长、最大偏离角、系绳质量、切断角对再入条件的影响以及满足再入条件下，不同轨道高度下的绳长范围。基于以上分析，给出了再入速度与轨道高度和绳长、最大偏离角与绳长、再入角与最大偏离角和绳长的解析表达式，给出了再入条件与绳长的二阶关系表达式，并进行了验证。该研究为今后利用系绳系统来实现辅助返回的相关参数的选择提供了一定的参考，为空间系绳系统辅助返回技术的研究提供了重要的理论依据。

关 键 词：空间系绳系统，辅助返回，再入条件

中图分类号：V11 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-2758(2014)05-0730-07

随着越来越多的小返回舱或物体频繁从空间站返回，系绳系统在返回系统中的应用得到了很大关注。返回舱从空间站返回地面时，使用系绳技术不会因推进器而浪费资源消耗[1]，与传统的返回操作相比具有安全性更好、着陆精度更高[2]等优势。因此，系绳辅助返回向传统靠推进器降轨返回的方式提出了挑战。

自 20 世纪 60 年代苏联科学家尤里阿特苏塔诺夫提出“太空天梯”以来，国内外学者对空间系绳系统理论及应用做了大量的研究，最主要的有系统模型的建立及系绳的展开。系绳成功展开是系绳应用技术的基础，对于系绳的展开国内外学者研究最多的仍然是张力控制律[3]，通过张力控制方法可以将小卫星精确地展开到指定的长度。同时随着最优控制理论的不断发展，研究人员将张力控制律与最优控制问题结合，将小卫星展开到指定长度的前提下，达到某种最优，如展开时间最短、能量最小等都取得了大量的成果[4]。空间系绳系统辅助返回技术是国内外学者在系绳成功展开的基础上对系绳系统应用技术的进一步研究[5-6]。但是在以往涉及到系绳系统辅助返回的文章中，主要精力还是放在研究系绳的展开和大气层内飞行路径最优控制上[7]，对于切断系绳之后返回舱的运动及再入条件分析，国内外的文章都未曾涉及到。因此，本文在完成系绳顺利展开工作之后，提出了对返回舱的再入条件进行计算的方法并分析了相关因素对再入条件的影响，得到了一系列的关系表达式，能够通过计算近似得到所需释放条件，对以后的空间系绳系统辅助返回的再入条件计算和相关参数选择提供了一定的理论参考依据。

1 系绳系统辅助返回过程

利用空间系绳系统进行辅助返回包括 4 个阶段：第一阶段，安全释放阶段，利用弹射推杆将带系绳的返回舱从基站沿地垂线方向抛出，并缓慢展开

收稿日期：2014-02-26 基金项目：2011 年度国家国际科技合作专项项目与陕西省科学技术研究发展计划项目(2013KW09-02)资助

作者简介：李爱军(1972—)，西北工业大学教授、博士生导师，主要从事飞行器控制与仿真、智能控制、空间系绳系统动力学与控制的研究

到当地垂线位置；第二阶段，快速释放与制动阶段，将系统展开到设定长度和最大偏角 θ_k 位置；第三阶段，回摆阶段，返回舱以基站航天器为中心以角速度 $\Omega = \dot{\theta}$ 作重力摆运动；第四阶段，在当地垂线位置采用熔断技术切断系绳，返回舱进入过渡轨道，在过渡椭圆轨道上向着大气层运动，在大气层边界处以合适的再入角 θ_a 和再入速度 V_a 从再入点进入大气层。如图 1 所示

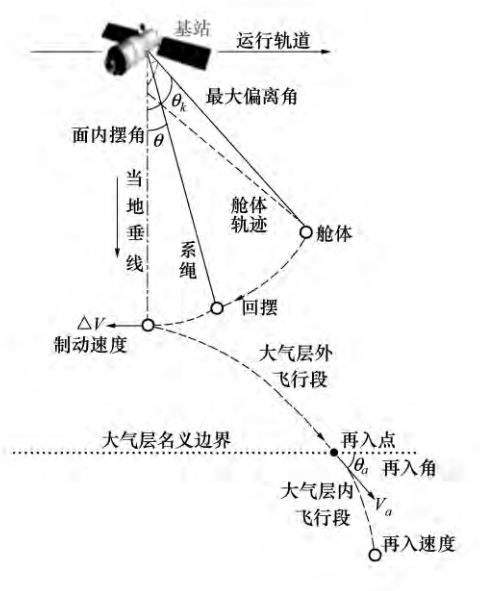


图 1　舱体的运动过程

本文研究的重点主要集中在第三阶段和第四阶段。返回舱能够顺利返回，必须能够顺利进入大气层，这就要求必须满足再入条件。再入条件主要包括再入角和再入速度，在弹道式返回中，再入角是返回舱再入的最主要影响因素。再入角的大小直接影响到航天器在大气层里所受的气动力加热、过载和返回时的航程。若再入角太小，则航天器可能只在稠密大气层的边缘掠过而进不了大气层；若再入角太大，则航天器受到的空气阻力会很大，过载可能超过允许值，同时气动力加热也会过于严重。因此，通常选取再入角为 1.3° ~ 1.8°左右[3]。

2　空间系绳系统辅助返回运动数学模型

2.1　系绳系统动力学模型

模型的基本假设：

1）除地球中心引力外，暂不考虑其他外部干扰，例如大气阻力；

2）基站航天器沿固定的开普勒圆轨道运动；

3）舱体为球形，不产生升力；

4）除了张力外，系绳既无弯曲刚度亦无扭转刚度，并忽略弹性。

对该系统采用哑铃模型建模，并采用经典的拉格朗日方法[4]：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} = Q_i \tag{1}$$

式中：T_c 为系统动能，q_i、$\dot{q}_i$ 和 Q_i（$i = 1,2,3$）为广义坐标、速度和力，$q_1 = L$，$q_2 = \theta$，$q_3 = \beta$，L 为绳长，θ 为系绳与地垂线的面内夹角，β 为系绳与轨道平面夹角。

对于圆轨道，不考虑系统的面外运动即 $\beta = \dot{\beta} = 0$，得到系统运动方程：

$$\begin{cases} \ddot{L} = L\dfrac{m + \rho L/2}{m + \rho L}\left[(\dot{\theta} + \Omega)^2 - \Omega^2(1 - 3\cos^2\theta)\right] - \dfrac{T + \rho L^2}{m + \rho L} \\ \ddot{\theta} = -2\dfrac{\dot{L}}{L}(\dot{\theta} + \Omega) - \dfrac{3}{2}\Omega^2\sin 2\theta \end{cases} \tag{2}$$

式中：Ω 为基站航天器的轨道运动角速度，m 为舱体质量，ρ 为系绳线密度，T 为系绳张力。

2.2　舱体回摆阶段运动模型

当基站航天器释放舱体结束之后，基站到舱体的矢径与当地垂线的夹角为最大偏离角。接下来，绳长固定不变。舱体在地球引力和系绳拉力的作用下向当地垂线回摆。此时有 $\ddot{L} = \dot{L} = 0$，$L = \mathrm{const}$，由公式（2）得：

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{2}\Omega^2\sin 2\theta \tag{3}$$

（3）式即为舱体作回摆运动的数学模型。

3　舱体再入条件计算过程

3.1　舱体初始条件计算

将（3）式化成二阶导数方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{2}\Omega^2\sin 2\theta = 0 \tag{4}$$

对方程（4）进行能量积分得：

$$\omega^2 - \frac{3}{2}\Omega^2\cos2\theta = c \tag{5}$$

式中：c 为任意常数。快速展开完成后的最终状态为舱体作回摆运动的初始状态 $[L_k, L_k, \theta_k, \dot{\theta}_k]$，$L_k$ 为释放的最终绳长，L_k 为绳长的释放速度，θ_k 为绳子展开完之后舱体与垂线之间的偏离角，即最大偏离角，$\dot{\theta}_k$ 为绳子展开完成之后舱体相对于当地垂线的角速度。将该时刻状态带入上式，解得任意常数 $c = -\frac{3}{2}\Omega^2\cos2\theta_k$，由仿真结果可知，$\dot{\theta}_k$ 数量级为 10^{-4}，忽略不计，从而根据(5)式，得到舱体作回摆运动时偏离角为 θ 的相对于当地垂线的角速度：

$$\omega = \dot{\theta} = \Omega\sqrt{\frac{3}{2}(\cos2\theta - \cos2\theta_k)} \tag{6}$$

则舱体相对于基站轨道坐标系的速度(相对速度)为：

$$\boldsymbol{V}_r = \dot{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{L}_k \tag{7}$$

$$\boldsymbol{V}_r = \Omega L_k\sqrt{\frac{3}{2}}(\cos2\theta - \cos2\theta_k) \tag{8}$$

除了相对速度外，由于舱体与空间系绳系统一起相对引力中心以角速度 Ω 转动，因此舱体还具有牵连速度：

$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{r} \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{r}$ 为舱体质心相对于引力中心的矢径。如图2，根据余弦定理可得：$\boldsymbol{r} = \sqrt{L_k^2 + R_0^2 - 2L_kR_0\cos\theta}$，$R_0$ 为基站到地心的矢径模量。

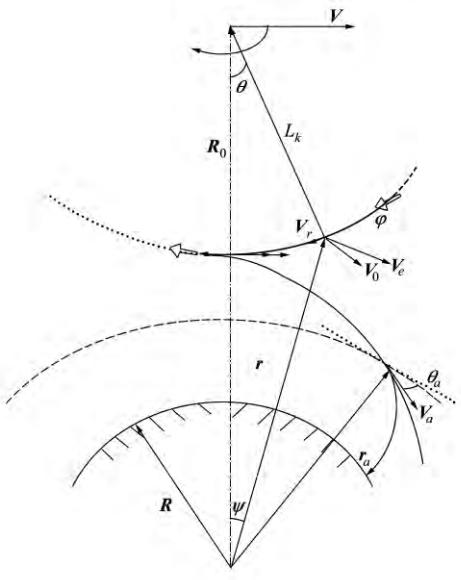


图2 舱体速度合成图

根据舱体速度合成图2，舱体的绝对速度可根据速度合成公式确定：

$$\boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{V}_e + \boldsymbol{V}_r \tag{10}$$

这个速度和地平线的夹角为轨迹倾斜角。绝对速度模量和轨迹倾斜角可以根据下面的表达式确定：

$$V_0 = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 - 2V_eV_r\cos(\theta + \psi)} \tag{11}$$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_r\sin(\theta + \psi)}{V_r\sin(\theta + \psi) - V_e}\right) \tag{12}$$

式中：ψ 为地心到舱体矢径与当地垂线的夹角，$\psi = \arcsin(L_k/r\sin\theta)$。

3.2 舱体再入条件计算

根据轨道动量矩守恒原理，对系绳切断位置与再入位置进行能量积分与面积积分，得到舱体再入条件和初始条件的关系：

$$\begin{cases} V_0^2 - \dfrac{2\mu}{r_0} = V_a^2 - \dfrac{2\mu}{r_a} \\ r_0V_0\cos\theta_0 = r_aV_a\cos\theta_a \end{cases} \tag{13}$$

式中：μ 为地球引力常数，r_0 为地心到舱体的矢径 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{L}$ 的模，$\boldsymbol{R}_0$ 为地心到基站矢径向量，r_a 为地心到名义大气层边界的矢径 $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{H}_A$ 的模，$\boldsymbol{R}$ 为地球矢径向量，$\boldsymbol{H}_A$ 为地心到名义大气层边界矢径向量，θ_0 为切断系绳时基站与舱体径向矢量与当地垂线的夹角，简称切断角，V_a 为再入速度 $\boldsymbol{V}_a$ 的模，θ_a 为再入角，如图2中所示，图中 V 基站速度。

4 仿真分析

仿真过程中，相关参数的选择如下：

地球引力常数 $\mu = 398\ 602\ \mathrm{km^3/s^2}$，地球平均半径 $R = 6\ 371.02\ \mathrm{km}$，基站航天器质量 $M = 6\ \mathrm{t}$，舱体质量 $m = 20\ \mathrm{kg}$，系绳线密度 $\rho = 0.2\ \mathrm{kg/km}$，大气层名义边界值 $H_A = 110\ \mathrm{km}$。

4.1 在不同基站轨道高度下绳长对再入条件的影响

取绳长为 20 ~ 140 km，基站轨道高度为 250 km，300 km，350 km，400 km，450 km，500 km，最大偏离角为 -56°的条件下分析对再入条件的影响，仿真结果如图3和图4所示。由图3可以看出在绳长为35 km左右的时候，出现了曲线相交的情况，此时各轨迹高度下的再入角大约为 1.8°，因此可以把这个交点视作不同轨道高度下满足再入条件的共同绳长点；当绳长小于共同绳长点时，轨道高度越高，随

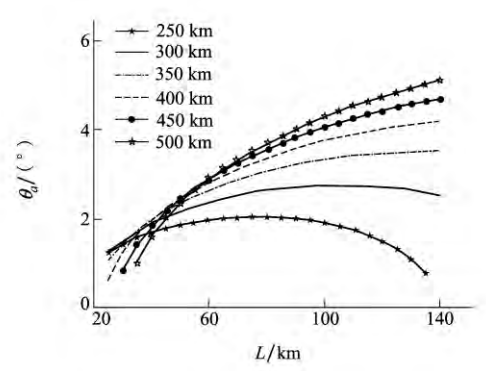


图 3　在不同基站轨道高度下绳长对再入角的影响

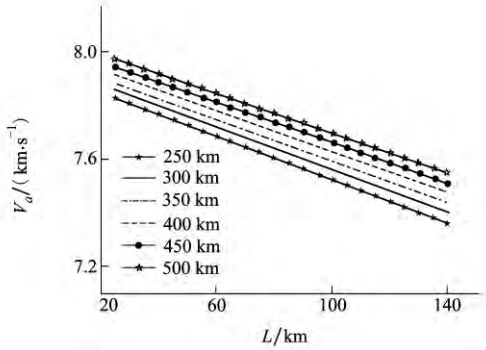


图 4　在不同基站轨道高度下绳长对再入速度的影响

着绳长的逐渐减小,得到的再入角减小趋势越大并比轨道高度低的减小速度更快,例如轨道高度为 500 km 时,绳长为 32 km 时,再入角就趋近于零,轨道高度为 250 km 时,绳长为 11 km 才趋近于零,此时返回舱无法进入大气层。在 250 km 和 350 km 的轨道范围内,随着绳长的增加,会出现绳长与再入角的极值点,绳长大于极值点之后,再入角减小,同样会趋近于零;轨道高于大于 350 km 时,随着绳长的增加,再入角大小单调递增。

图 4 给出了在不同基站轨道高度下,绳长对再入速度的影响。从图中可以看出,在不同基站轨道高度下,绳长与再入速度呈线性负相关,即随着绳长的增加,再入速度一致减小。因此,可以写出再入速度与轨道高度和绳长的线性关系式:$V_A = k_1 H + k_2 L + c$,利用下山单纯形法求最优解,得:$k_1 = 0.000\,7$,$k_2 = -0.004\,0$,$k_3 = 7.754\,1$

$$V_A = 0.000\,7H - 0.004L + 7.754\,1 \quad (14)$$

4.2　在不同基站轨道高度下绳长对最大偏离角的影响

要考虑最大偏离角对再入条件的影响,必须先知道最大偏离角的取值范围。分别分析了在不同轨道高度和绳长的影响下,最大偏离角的变化情况,如图 5 所示。

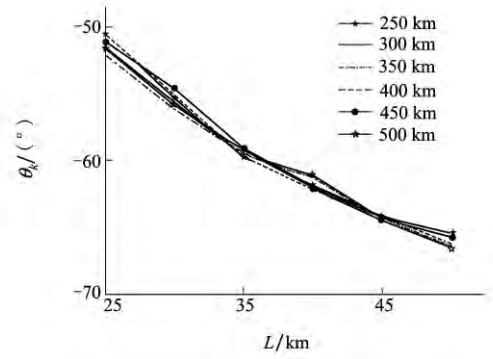


图 5　在不同基站轨道高度和绳长下最大偏离角的范围

图 5 给出了在不同基站轨道高度和绳长下最大偏离角的变化情况。从图 3 可以看出,在满足再入角为 1.3°到 1.8°的范围内,绳长最大范围在 25 km 到 50 km 范围内,因此,图 5 是在满足再入角条件下得到的仿真结果。从图中可以看出,随着系绳长度的增加,最大偏离角在 -50°到 -66°的范围内呈近似二次非线性规律,且高度对最大偏离角的影响很小。因此,可以考虑最大偏离角只与绳长有关,通过最小二乘法拟合得到关系式:

$$\theta_k = 0.012\,7L^2 - 1.539\,4L - 20.718\,6 \quad (15)$$

拟合关系曲线如图 6 所示:

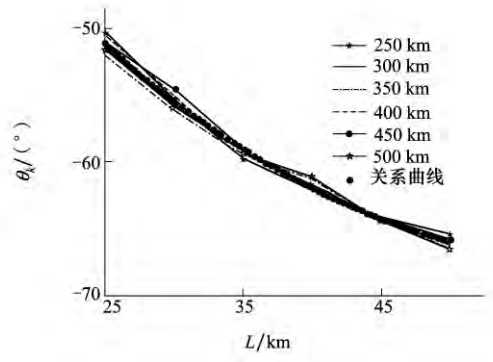


图 6　绳长与最大偏离角的关系曲线

4.3　在不同绳长下最大偏离角对再入条件的影响

从图 5 得知,轨道高度对最大偏离角的影响很小,因此只考虑系绳长度对最大偏离角的影响。在考虑最大偏离角对再入条件的时候,只分析不同绳长下最大偏离角对再入条件的影响。

根据图 5,取最大偏离角的范围为 -53°到 -65°,根据图 3,取绳长范围为 28 km 到 38 km。图 7、

图8给出了在不同绳长下最大偏离角对再入角、再入速度的影响。

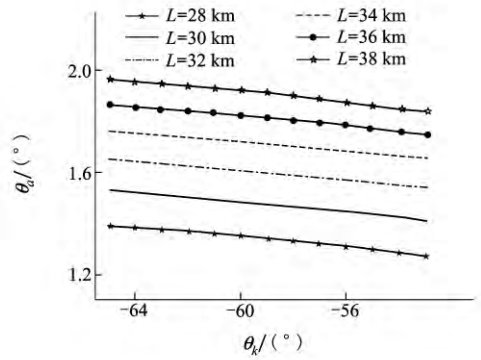


图7 在不同绳长下最大偏离角对再入角的影响

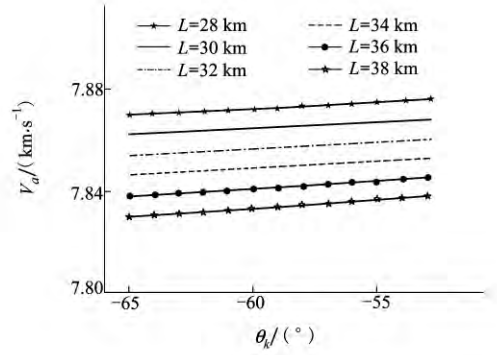


图8 在不同绳长下最大偏离角对再入速度的影响

从图中可以看出，在不同绳长条件下，再入角和再入速度与最大偏离角绝对值呈线性正相关，即随着偏离角绝对值的减小，再入角、再入速度一致减小。因此，采用下山单纯形法确定最优参数，可以试写出再入角与最大偏离角和绳长的线性关系表达式：

$$\theta_a = 0.058\,6L - 0.009\,8\theta_k - 0.872\,4 \quad (16)$$

同理，可以得到再入速度与最大偏离角和绳长的线性表达式：

$$V_a = -0.003\,9L + 0.000\,5\theta_k + 8.012\,9 \quad (17)$$

又由(15)式可以直接得出再入角 θ_a 和再入速度 V_a 与绳长 L 的直接关系式：

$$\begin{cases}\theta_a = -0.000\,124\,46L^2 + 0.073\,7L - 0.669\,4\\ V_a = 0.000\,006\,35L^2 - 0.004\,7L + 8.023\,5\end{cases} \quad (18)$$

(18)式必须在满足4.2和4.3中的条件范围即绳长范围在28～38 km左右，如果超出这个范围，由图3可知，各轨道高度下的再入条件随绳长的变化相差很大，很难得到统一的关系表达式。这样，通过给定绳长，就可以知道再入条件，同样可以逆推，根据再入条件可以得到绳长的大概取值，因为在4.2和4.3的条件下，轨道高度对再入条件的影响很小。

4.4 系绳质量对再入条件的影响

4.1～4.3是在考虑系绳质量的情况下，分析了绳长、偏离角与再入条件的影响，下面分析系绳质量对再入条件的影响。图9为轨道高度为400 km下系绳质量对再入角的关系图。

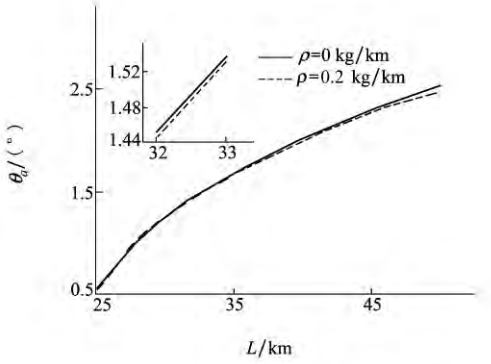


图9 系绳质量对再入角的影响

由图9可以看出，在满足再入条件的情况下，系绳质量对再入角的影响很小，特别是绳长45 km以下几乎没有影响。因此，在以后的再入条件分析中甚至可以忽略系绳质量的影响，系绳系统的运动学方程也可以得到简化。

4.5 切断角对再入条件的影响

在以往的文献中，都是假设在当地垂线处切断系绳，这样获得最大的制动冲量[9]。但是，由于存在测量误差或执行机构动作的延时性，会使得切断系绳时，切断角不一定为零，即切断系绳时舱体并不是刚好经过当地垂线位置。因此，本文对切断角不为零时对再入角的影响进行了仿真分析。仿真条件：取绳长为30 km，基站轨道高度为400 km。如图10所示。

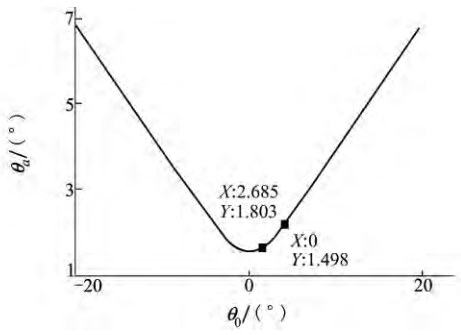


图10 切断角对再入角的影响

由图 10 可知，切断角的绝对值对再入角的影响成近似线性关系，切断角绝对值越大，对再入角的影响越大。因此，要使舱体满足再入条件，必须控制好切断角的大小。在该仿真条件下，L_k = 30 km，H = 400 km，切断角绝对值不能超过 2.685°。

4.6　满足合适再入条件下的绳长范围

(18)式给出了在满足再入条件下再入角和再入速度与绳长的近似关系表达式。这里，给出了在满足再入条件下，系绳长度的仿真范围，如图 11 所示：

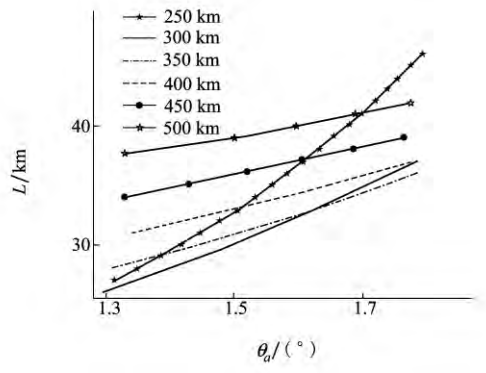


图 11　合适的再入角与绳长的关系图

从图 11 可以看出，在合适的再入角条件下，不同基站高度所需要的绳长有显著的差别，基站轨道高度越低，绳长的范围选择越宽，基站轨道高度越高，绳长的范围选择越窄。图 11 也验证了 YES2 试验选择 30 km 作为系绳释放长度的原因，在 YES2 试验中，轨道高度为 300 km，再入角为 1.5°[9]，从图上可知，30 km 为最佳绳长。

5　数据验证

由图 11 可以看出，在满足再入条件的情况下，不同高度下对应的再入角与绳长的关系很难用特定的关系表达式表示，且在本文所考虑的基站轨道高度下，基站高度对再入角的影响很小。表 1 验证了(18)式在再入角为 1.5°时的绳长计算值与绳长仿真值的差值很小，最大差值不超过 1.6 km。因此，在一般的空间站高度范围内(不超过 400 km)，可以根据(18)式近似计算所需绳长。

表 1　再入角计算值为 1.5°时与仿真值的比较

轨道高度 /km	绳长仿真值 /km	再入角仿真值/(°)	绳长计算值 /km
250	32.543	1.501	31.065
300	30.128	1.498	
350	30.835	1.501	
400	32.585	1.504	

6　结　论

本文主要针对空间系绳系统辅助返回的大气层再入条件进行了计算及相关影响因素的分析。在通过计算得出返回舱再入条件的基础上，对相关因素如基站高度、系绳长度、最大偏离角、系绳质量以及切断角对再入条件的影响进行了详细的分析，得到了再入条件与以上因素的关系表达式，最终得出再入条件与绳长的二阶关系表达式，并进行了验证。分析了在合适再入条件下不同基站轨道高度对应的系绳长度范围，通过与 YES2 中的参数进行对比，证明了该再入条件计算方法的正确性。通过本文的研究，对空间系绳系统辅助返回技术的再入条件计算提供了理论依据。今后的重点将向进一步提高再入条件的计算精度，系绳弹性、外界扰动对再入条件的影响，以及返回舱姿态控制和落点精度等方向发展，以便为空间系绳系统辅助返回在今后的实际应用中提供更多的参考价值。

参考文献：

[1] Holger GlaBel, Zimmermann Frank, Bruckner Steffen, Schottle Ulrich M, Rudolph Stephan. Adaptive Neural Control of The Deployment Procedure for Tether-Assisted Re-Entry [J]. Aerospace Science and Technology, 2004, 8(1): 73-81

[2] Van der Hyde EJ, Heide Kruijff M. Star Track A Swinging Tether Assisted Re-Entry for The International Space Station [M]. European Space Agency, 1996

[3] Rupp C. A Tether Tension Control Law for Tethered Satellite Deployed along Local Vertical [R]. Marshall Space Flight Center, NASA TM X-64963, 1975

[4] 冯杰，鲜勇，雷刚. 绳系卫星安全捕获策略下的释放最优控制 [J]. 宇航学报，2011，32(9)：1939-1944

Feng Jie, Xian Yong, Lei Gang. Optimal Control of Deployment with The Strategy of Safe Capture Using Tethered Subsatellite [J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(9): 1939-1944 (in Chinese)

[5] Bevilacqua Franco, Burigo Mario Lorenzo. Tether Deorbit System: A Promising Alternative [C] //3rd Tethers in Soace/Toward Flight International Conference, 1989

[6] 曹喜滨，郑鹏飞. 基于 Galerkin 法的柔性系绳辅助返回系统的展开动力学建模与分析 [J]. 航空学报. 2011, 25(3): 421-428

Cao Xibin, Zheng Pengfei. Modeling and Analysis of Deployment Dynamics for Flexible Tethered-Assisted Return System Based on Galerkin Method [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 25(3): 421-428 (in Chinese)

[7] Zimmermann Frank, Schottle Ulrich M, Messerschmid Ernst. Optimization of The Tether-Assisted Return Mission of A Guided Re-Entry Capsule [J]. Aerospace Science and Technology, 2005, 9(8): 713-721

[8] Iharulidze U G. Space Vehicles Ballistics [M]. Nauka, Moscow, 1982

[9] 扎伯罗特诺夫·尤里. 空间系绳系统运动动力学与控制导论 [M]. 王长青，译. 北京:科学出版社, 2013

Zablotnov Yuriy. Introduction to Dynamics and Control in Space Tether System [M]. Wang Changqing, Translator. Beijing, Science Press, 2013 (in Chinese)

Calculating Reentry Conditions for Space Tether-Assisted Return System

Li Aijun[1], Wei Hanlin[1], Wang Changqing[1], Zabolotnov Yuriy[2]

(1. Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
2. Samara State Aerospace University, Samara, Russia)

Abstract: The atmospheric reentry conditions for a space tether-assisted return system are calculated, and its influence factors are analyzed based on the space tether-assisted deorbit system. The space tether-assisted return process is described, its dynamic model and the backswing model of the capsule in the orbit coordinate system are established, and the results on the calculation of reentry conditions are given. The influence on reentry conditions by tether length, maximum deviation, tether mass, cut angle and the range of tether length that meet the reentry conditions under different altitudes are analyzed. The analytical expression among reentry velocity, altitude and tether length, the expression between maximum deviation angle and tether length and the expression among reentry angle, maximum deviation angle and tether length are obtained. Finally the second order expression between reentry condition and tether length is obtained and verified. This study has reference value for choosing the parameters of a future tether-assisted return system and calculating its return conditions.

Key words: angular velocity, base stations, calculations, computer simulation, least squares approximations, mathematical models, orbits, reentry, spacecraft, tether lines, velocity; reentry condition, space tether system, tether-assisted reentry