

# 基于前景理论的一种犹豫模糊多属性群决策方法

孙朋, 张骏, 曾红斌

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:**针对犹豫模糊环境下属性权重未知的多属性群决策问题,建立了一种基于前景理论的犹豫模糊多属性群决策方法。根据决策者的单属性偏好函数,提出了一种改进的熵权法来确定属性权重。通过引入前景理论,将犹豫模糊决策矩阵转换为基于参考点为正负理想解的前景决策矩阵,利用方案的收益损失比代替贴合度,并依此对方案进行排序,最后验证了该方法的有效性和可行性。

**关键词:**多属性群决策;前景理论;犹豫模糊集;专家权重;模糊集;决策

中图分类号:C934

文献标志码:A

文章编号:1000-2758(2018)04-0735-07

随着人们生产生活中决策问题的日益复杂化,传统的多属性决策方法在一些亟待解决的决策难题面前常常束手无力。为了模拟人在决策过程中的犹豫不决状态,诸如区间模糊集、直觉模糊集及区间直觉模糊集等概念陆续被提出,并被广泛用于实际决策中。Torra 拓宽了模糊集的概念,提出了犹豫模糊集,并被很多学者引入到多属性决策问题中描述决策者的优柔寡断程度<sup>[1]</sup>。Xu 等提出了一种解决权重信息不充分的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法<sup>[2]</sup>。朱丽等针对属性值为犹豫模糊数和区间犹豫模糊数,提出了一种犹豫模糊风险型决策方法<sup>[3]</sup>。刘云志等针对具有单一或组合指标期望的多属性决策,将原始决策问题转化为广义优序模糊约束满意问题,通过计算总体满意度对方案进行排序<sup>[4]</sup>。刘小弟等通过构建正负理想点,建立了一种针对犹豫模糊信息的向量投影测度方法,结合 Jaynes 最大熵原理,确定方案的排序结果<sup>[5]</sup>。Sun 等通过结合模糊集理论和模糊层次分析法优点,较好地解决了判断矩阵中的不确定性<sup>[6]</sup>。Amali 和 Ramachandran 基于主成分分析建立了决策矩阵,解决了多属性群决策方法的复杂度问题<sup>[7]</sup>。Lin 提出了一种基于决策者风险偏好的多属性决策方法,并建立了计算决策者风险偏好的方法<sup>[8]</sup>。

前景理论自 1979 年被诺贝尔经济学奖获得者 Kahneman 等提出以来,由于很好地解释了人们在面

临决策行为时的确定性效应、孤立效应和反射效应,在决策领域获得了广泛的应用。李鹏等通过分析旧记分函数的缺陷,建立了一种基于集对论的新记分函数,使用新记分函数将直觉模糊决策矩阵转化为记分矩阵,进而得到基于零参考点的前景决策矩阵,解决了随机直觉模糊决策问题<sup>[9]</sup>。王坚强等为了解决区间灰数随机多准则决策问题,将风险决策矩阵转换为基于参考点为备选方案的前景决策矩阵,并利用实际算例验证了方法的有效性<sup>[10]</sup>。张娟等针对决策信息为区间数的多指标决策问题,引入前景理论将决策矩阵转换为基于参考点为正负靶心的前景决策矩阵,构造决策树确定方案的排序<sup>[11]</sup>。高建伟等通过新构造的记分函数,将区间模糊数转换为实数,并构建了基于零参考点的前景决策矩阵,计算方案的综合前景值并依此排序<sup>[12]</sup>。

现有多属性群决策方法主要比较方案集内部的贴近程度,不能够反映与理想解的相对接近程度。通过引入前景理论可以计算每个方案相对于理想方案的前景值,准确表示出不同方案基于参考点为理想解的收益和损失情况。因此,本文研究建立了一种基于前景理论的犹豫模糊多属性群决策方法。利用不同权重的专家对各个方案的所有属性值给出评估,并用犹豫模糊集记录。基于前景理论,使用正负理想解作为参照点,将犹豫模糊决策矩阵转化为收益及损失决策矩阵,考虑到决策者的风险偏好和风

险厌恶程度,计算每个方案的收益损失比,并依此进行排序。最后验证了此方法的有效性。

### 1 问题描述和模型构建

#### 1.1 问题描述

设一个犹豫模糊多属性决策问题共有  $M$  个备选方案和  $N$  个评价属性,分别记为  $A_k, k = 1, 2, \dots, M$  以及  $b_n, n = 1, 2, \dots, N$ ; 方案集为  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_M\}$ , 属性集为  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$ , 相应的属性权重集为  $w = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ , 且满足  $w_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, N$  及  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ 。专家集  $G = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ , 专家  $y_q (q = 1, 2, \dots, p)$  对方案  $A_k$  在属性  $b_n$  上的属性值匿名评估结果为  $h_{kn}^q = E\{\gamma_{kn}^{q1}, \gamma_{kn}^{q2}, \dots, \gamma_{kn}^{ql_q}\}$ ,  $h_{kn}^q$  为一个犹豫模糊数,  $l_q$  为犹豫模糊数中的元素个数。由于专家的心理状态以及主观认识不同,对同一个方案在同一个属性评估结果通常情况下不相同,所以犹豫模糊数  $h_{kn}^q$  的大小和元素个数一般不相同。考虑到专家评估结果权重不同,设专家权重集为  $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_q\}$ 。

根据专家权重的加权处理方法,可得到方案  $A_k$  在属性  $b_n$  上的属性值为  $h_{kn}^{[13]}$ 。设决策者对某属性偏好为  $\varphi_n(h_{kn})$ , 且  $\varphi_n(h_{kn}) \in [0, 1]$ , 则经典的多属性固权决策模型可以表示为:

$$U_k = \sum_{n=1}^N w_n \varphi_n(h_{kn}), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (1)$$

式中,  $U_k$  表示决策者对第  $k$  个方案的综合偏好。若对于所有的属性值(1)式都成立,则称属性  $b_1, b_2, \dots, b_N$  之间偏好绝对独立或者属性偏好独立。

#### 1.2 改进型熵权法

信息熵描述了一个系统的无序程度,某个指标的信息熵越小,表征其变异程度越大,所蕴含的信息量越多,则应该赋予这个指标更大的权重。在多属性决策中,对犹豫模糊决策矩阵进行标准化处理后,基于犹豫模糊熵的权重,指标  $h_{kn}$  的犹豫模糊熵  $E_{kn}$  定义为<sup>[14]</sup>:

$$E_{kn} = \frac{1}{l_{kn}(\sqrt{2} - 1)} \sum_{i=1}^{l_{kn}} \left( \sin \frac{\pi(h_{\sigma(i)} + h_{\sigma(l_{kn}-i+1)})}{4} + \cos \frac{\pi(h_{\sigma(i)} + h_{\sigma(l_{kn}-i+1)})}{4} - 1 \right) \quad (2)$$

式中,  $h_{\sigma(i)}$  表示犹豫模糊元  $h_{kn}$  中第  $i$  大的元素,  $l_{kn}$  是犹豫模糊元  $h_{kn}$  的元素个数,不同属性的权重定义为:

$$w_n = \frac{1 - \hat{E}_n}{\sum_{j=1}^N (1 - \hat{E}_j)}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

式中,  $\hat{E}_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M E_{kn}$  表示第  $n$  个属性的平均犹豫模糊熵。在属性偏好独立的条件下,主观修正系数  $\lambda(h)$  定义为<sup>[15]</sup>:

$$\lambda(h) = [\exp(a(\varphi_1(h_{k1}) - \bar{\varphi}_k)), \dots, \exp(a(\varphi_n(h_{kn}) - \bar{\varphi}_k))], \quad \forall k = 1, 2, \dots, M \quad (4)$$

式中,  $\bar{\varphi}_k$  为

$$\bar{\varphi}_k = \frac{\sum_{i=1}^N \varphi_i(h_{ki})}{N}$$

$$a \in (-\infty, +\infty), \quad \forall k = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

在这里,  $\varphi_i(h_{ki}) (i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, \dots, M)$  表示决策者的单属性偏好函数。(4)式中关于  $a$  的取值并没有明确的赋值方法,比较笼统的取值原则:“决策者对状态值大的因素考虑越多,  $a$  的取值应该趋于正无穷大;决策者对状态值小的因素考虑越多,  $a$  的取值应该趋于负无穷大”<sup>[16]</sup>。

为了获得主成分对主观修正系数影响,对(4)式泰勒展开,可得

$$\lambda_j(h) = \exp(a(\varphi_j(h_{kj}) - \bar{\varphi}_k)) \approx 1 + a(\varphi_j(h_{kj}) - \bar{\varphi}_k) + \frac{1}{2}a^2(\varphi_j(h_{kj}) - \bar{\varphi}_k)^2 \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad \forall k = 1, 2, \dots, M \quad (6)$$

使用主观修正系数  $\lambda_j(h)$ , 对(3)式中权重进行修正,可得

$$w_i^* = \frac{\lambda_i(h)w_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j(h)w_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

将(6)式代入(7)式,可得

$$w_i^* = \frac{\left(1 + a(\varphi_i(h_{ki}) - \bar{\varphi}_k) + \frac{1}{2}a^2(\varphi_i(h_{ki}) - \bar{\varphi}_k)^2\right)w_i}{\sum_{j=1}^N \left(1 + a(\varphi_j(h_{kj}) - \bar{\varphi}_k) + \frac{1}{2}a^2(\varphi_j(h_{kj}) - \bar{\varphi}_k)^2\right)w_j} \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad \forall k = 1, 2, \dots, M \quad (8)$$

## 2 决策步骤

由于决策者固有的风险偏好以及实际问题中决策问题的复杂化、模糊化程度加剧,决策者往往不能完全凭借自己的能力做出合理判断,参考专家的意见就显得尤为重要。经典 TOPSIS 多属性决策方法要求属性值为已知的精确值,且决策者是完全理性的,这样的假设难以胜任实际的复杂问题。因此,本文建立了一种基于前景理论的犹豫模糊多属性决策方法,通过专家集对方案的属性值进行匿名评估,在获得所有的专家评估结果后,根据专家权重,加权处理得到每个方案在每个属性上的属性值;再通过熵权法确定属性权重,加权处理得到犹豫模糊决策矩阵,计算每个方案与正负理想解<sup>[17]</sup>的距离及综合前景值,确定所有方案的排序结果。具体步骤如下:

1) 确定专家权重的方案属性值  $h_{kn}$ , 专家  $y_q$  对方案  $A_k$  在属性  $b_n$  上的属性值匿名评估结果为  $h_{kn}^q = E\{\gamma_{kn}^q, \gamma_{kn}^{q2}, \dots, \gamma_{kn}^{ql}\}$ , 其权重为  $\eta_q$ 。加权处理得到最终的方案  $A_k$  在属性  $b_n$  上的属性值  $h_{kn}$ , 再通过熵权法确定属性权重。根据决策者的风险偏好, 扩充元素个数较少的犹豫模糊数  $h_{kn}$ , 直至所有的犹豫模糊数具有相同的元素个数。再按从小到大排列所有元素, 由于属性可以分为效益型和成本型, 为了简化量纲和数量级的运算, 将成本型属性转化为效益型属性。具体转化方法为, 对于成本型属性值  $h_{kn} = E\{\gamma_{kn}^1, \gamma_{kn}^2, \dots, \gamma_{kn}^l\}$ , 转化之后的效益型属性值为  $\hat{h}_{kn} = E\{1 - \gamma_{kn}^1, 1 - \gamma_{kn}^2, \dots, 1 - \gamma_{kn}^l\}$ , 其中  $l_{kn}$  表示犹豫模糊数的元素个数。如果是效益型属性值, 转化之后的属性值为  $\hat{h}_{kn} = h_{kn}$ 。因此, 可得犹豫模糊决策矩阵为:

$$J = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1N} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \dots & \hat{h}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_{M1} & \hat{h}_{M2} & \dots & \hat{h}_{MN} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中,  $\hat{h}_{kn} = E\{\gamma_{kn}^1, \gamma_{kn}^2, \dots, \gamma_{kn}^l\}$ ,  $l$  为经过标准化和归一化处理每个犹豫模糊数  $\hat{h}_{kn}$  具有的共同元素个数。

2) 计算加权犹豫模糊决策矩阵  $Q$ , 设  $W = \text{diag}(w_1^*, w_2^*, \dots, w_N^*)$ , 其中  $w_i^*$  是各个属性的修正权重, 其由(8)式计算而得, 则

$$Q = JW = \begin{bmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} & \dots & \hat{h}_{1N} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} & \dots & \hat{h}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{h}_{M1} & \hat{h}_{M2} & \dots & \hat{h}_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ w_2^* \\ \vdots \\ w_N^* \end{bmatrix} \quad (10)$$

计算每个方案与正负理想解的犹豫模糊 Hamming 距离测度或者犹豫模糊欧式距离测度, 其中正理想解为  $\Omega^+$ , 表示属性值的最大值。负理想解为  $\Omega^-$ , 表示属性值的最小值。

$$\Omega^+ = \left\{ \left( \max_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{k1}^s w_1^*) \right), \left( \max_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{k2}^s w_2^*) \right), \dots, \left( \max_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{kN}^s w_N^*) \right) \right\} \quad (11)$$

$$\Omega^- = \left\{ \left( \min_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{k1}^s w_1^*) \right), \left( \min_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{k2}^s w_2^*) \right), \dots, \left( \min_{1 \leq k \leq M} (\gamma_{kN}^s w_N^*) \right) \right\} \quad (12)$$

$l$  为每个犹豫模糊数的元素个数, 扩充后每个犹豫模糊数长度是相等的。则方案  $A_k$  相对于正负理想解的犹豫模糊欧式距离可以表示为<sup>[18]</sup>:

$$D(A_k, \Omega^+) = \{d(Q_{k1}, \Omega^+(1)), d(Q_{k2}, \Omega^+(2)), \dots, d(Q_{kN}, \Omega^+(N))\} \quad (13)$$

$$D(A_k, \Omega^-) = \{d(Q_{k1}, \Omega^-(1)), d(Q_{k2}, \Omega^-(2)), \dots, d(Q_{kN}, \Omega^-(N))\} \quad (14)$$

(13)式和(14)式中  $\Omega^\pm(n)$  表示理想解  $\Omega^\pm$  中第  $n$  个元素的属性值,  $d(Q_{kn}, \Omega^\pm(n))$  表示犹豫模糊数  $Q_{kn}$  与  $\Omega^\pm(n)$  的犹豫模糊欧式距离。

3) 计算方案  $A_k$  在属性  $b_n$  上的前景值, 相对于正理想解来说, 方案  $A_k$  是损失的; 相对于负理想解来说, 方案  $A_k$  是产生收益的。因此, 根据 Tversky 给出的价值函数  $v(\Delta x)$ <sup>[19]</sup>, 前景值分别为

$$v^-(d(Q_{kn}, \Omega^+(n))) = -\theta(d(Q_{kn}, \Omega^+(n)))^\beta, \quad k = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N \quad (15)$$

$$v^+(d(Q_{kn}, \Omega^-(n))) = (d(Q_{kn}, \Omega^-(n)))^\alpha, \quad k = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N \quad (16)$$

式中,  $\alpha, \beta$  和  $\theta$  是已知参数,  $\alpha$  是风险态度系数, 表示决策者对收益的关心程度;  $\beta$  是损失厌恶系数, 表

示决策者对损失的关心程度; $\theta$  表示决策者对收益和损失的敏感程度不同。通常参数的取值范围为  $\alpha > 0, \beta < 1, \theta > 1$ 。

4) 计算方案的收益损失比  $x_k = \left| \frac{\sum_{n=1}^N v^+(d(Q_{kn}, \Omega^-(n)))}{\sum_{n=1}^N v^-(d(Q_{kn}, \Omega^+(n)))} \right|$ , 并根据  $x_k$  的大小对方案进行排序。

### 3 算例分析

某企业打算更换一批生产线以适应企业发展的

表 1 专家评估及归一化犹豫模糊处理后的结果

方案	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$A_1$	$y_1: \{0.2, 0.4\}$	$y_1: \{0.3\}$	$y_1: \{0.15, 0.45, 0.65\}$	$y_1: \{0.3, 0.45\}$
	$y_2: \{0.6\}$	$y_2: \{0.1, 0.6, 0.8\}$	$y_2: \{0.3\}$	$y_2: \{0.3\}$
	$\{0.32, 0.46\}$	$\{0.24, 0.39, 0.45\}$	$\{0.195, 0.405, 0.545\}$	$\{0.3, 0.405\}$
	$\{0.54, 0.68, 0.68\}$	$\{0.24, 0.39, 0.45\}$	$\{0.195, 0.405, 0.545\}$	$\{0.595, 0.7, 0.7\}$
$A_2$	$y_1: \{0.1, 0.3, 0.6\}$	$y_1: \{0.3\}$	$y_1: \{0.25, 0.35\}$	$y_1: \{0.4, 0.8\}$
	$y_2: \{0.55\}$	$y_2: \{0.45, 0.75\}$	$y_2: \{0.3\}$	$y_2: \{0.5\}$
	$\{0.235, 0.375, 0.585\}$	$\{0.345, 0.435\}$	$\{0.265, 0.335\}$	$\{0.43, 0.71\}$
	$\{0.415, 0.625, 0.765\}$	$\{0.345, 0.345, 0.435\}$	$\{0.265, 0.265, 0.335\}$	$\{0.29, 0.57, 0.57\}$
$A_3$	$y_1: \{0.35, 0.65\}$	$y_1: \{0.2, 0.4, 0.7\}$	$y_1: \{0.1\}$	$y_1: \{0.25, 0.65\}$
	$y_2: \{0.2\}$	$y_2: \{0.3\}$	$y_2: \{0.1, 0.5, 0.9\}$	$y_2: \{0.3\}$
	$\{0.305, 0.515\}$	$\{0.23, 0.37, 0.58\}$	$\{0.1, 0.22, 0.34\}$	$\{0.265, 0.545\}$
	$\{0.485, 0.695, 0.695\}$	$\{0.23, 0.37, 0.58\}$	$\{0.1, 0.22, 0.34\}$	$\{0.265, 0.265, 0.545\}$
$A_4$	$y_1: \{0.2\}$	$y_1: \{0.15, 0.4, 0.7\}$	$y_1: \{0.35, 0.45\}$	$y_1: \{0.4\}$
	$y_2: \{0.55\}$	$y_2: \{0.3\}$	$y_2: \{0.45\}$	$y_2: \{0.3, 0.5, 0.7\}$
	$\{0.305\}$	$\{0.195, 0.37, 0.58\}$	$\{0.38, 0.45\}$	$\{0.37, 0.43, 0.49\}$
	$\{0.695, 0.695, 0.695\}$	$\{0.195, 0.37, 0.58\}$	$\{0.38, 0.38, 0.45\}$	$\{0.51, 0.57, 0.63\}$
$A_5$	$y_1: \{0.2, 0.45\}$	$y_1: \{0.4, 0.75\}$	$y_1: \{0.2\}$	$y_1: \{0.05, 0.95\}$
	$y_2: \{0.3\}$	$y_2: \{0.15\}$	$y_2: \{0.3, 0.4, 0.5\}$	$y_2: \{0.35\}$
	$\{0.23, 0.405\}$	$\{0.325, 0.57\}$	$\{0.23, 0.26, 0.29\}$	$\{0.14, 0.77\}$
	$\{0.595, 0.77, 0.77\}$	$\{0.325, 0.325, 0.57\}$	$\{0.23, 0.26, 0.29\}$	$\{0.23, 0.86, 0.86\}$

方案  $A_1$  在属性  $b_1$  上的属性值专家评估结果为  $y_1: \{0.2, 0.4\}, y_2: \{0.6\}$ 。考虑专家权重  $\{0.7, 0.3\}$ , 经加权处理后的属性值为  $\{0.32, 0.46\}$ , 其中  $0.32 =$

需要, 经过市场调研发现市面共有 5 种合适的生产线可供采购, 设为  $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ 。根据具有生产线操作经验的专家  $\{y_1, y_2\}$  的建议, 专家权重设为  $\{0.7, 0.3\}$ 。基于 4 种属性指标评价,  $b_1$  表示购买花费,  $b_2$  表示产品质量提升率,  $b_3$  表示单条生产线产能提升量/月,  $b_4$  表示新增生产线维护增加花费/次, 其中  $b_1$  和  $b_4$  为成本型属性,  $b_2$  和  $b_3$  为效益型属性, 4 种属性的权重为  $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ , 且  $\sum_{i=1}^4 w_i = 1, w_i > 0$ 。专家根据自己的经验分别匿名对各个属性进行评估, 给出相应的犹豫模糊矩阵, 考虑专家权重, 依据风险厌恶型扩充犹豫模糊数, 标准化和归一化之后得到属性值, 如表 1 所示。

$0.2 \times 0.7 + 0.6 \times 0.3^{[14]}$ , 经过标准化和归一化后的属性值为  $\{0.54, 0.68, 0.68\}$ , 其他属性值数据类似, 进而获得犹豫模糊熵, 如表 2 所示。

表2 犹豫模糊熵

方案	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$A_1$	0.949 2	0.915 9	0.940 1	0.908 8
$A_2$	0.955 4	0.949 2	0.832 9	0.979 4
$A_3$	0.965 9	0.951 1	0.675 1	0.962 1
$A_4$	0.841 1	0.940 9	0.969 6	0.979 4
$A_5$	0.860 7	0.988 4	0.760 2	0.991 5

使用熵权法确定的未修正属性权重为: $w =$

表3 加权犹豫模糊决策处理的结果

方案	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$A_1$	{0.219 9,0.276 9,0.276 9}	{0.058 2,0.094 5,0.109 0}	{0.056 1,0.116 6,0.156 9}	{0.037 3,0.043 9,0.043 9}
$A_2$	{0.169 0,0.254 5,0.311 5}	{0.083 6,0.083 6,0.105 4}	{0.076 3,0.076 3,0.096 4}	{0.018 2,0.035 7,0.035 7}
$A_3$	{0.197 5,0.283 0,0.283 0}	{0.055 7,0.089 7,0.140 5}	{0.028 8,0.063 3,0.097 9}	{0.016 6,0.016 6,0.034 1}
$A_4$	{0.283 0,0.283 0,0.283 0}	{0.047 3,0.089 7,0.140 5}	{0.109 4,0.109 4,0.129 5}	{0.032 0,0.035 7,0.039 5}
$A_5$	{0.242 3,0.313 5,0.313 5}	{0.078 8,0.078 8,0.138 1}	{0.066 2,0.074 8,0.083 5}	{0.014 4,0.053 9,0.053 9}

由此可以得到正负理想解:

$$\begin{aligned} \Omega^+ &= \{E\{0.283\ 0,0.313\ 5,0.313\ 5\}, \\ &E\{0.083\ 6,0.094\ 5,0.140\ 5\}, \\ &E\{0.109\ 4,0.116\ 6,0.156\ 9\}, \\ &E\{0.037\ 3,0.053\ 9,0.053\ 9\}\} \\ \Omega^- &= \{E\{0.169\ 0,0.254\ 5,0.276\ 9\}, \\ &E\{0.047\ 3,0.078\ 8,0.105\ 4\}, \\ &E\{0.028\ 8,0.063\ 3,0.083\ 5\}, \\ &E\{0.014\ 4,0.016\ 6,0.034\ 1\}\} \end{aligned}$$

相对于正理想解,方案是损失的;相对于负理想解,方案是盈利的。当 $\alpha = \beta = 0.88, \theta = 2.25$ 时,根据(15)式和(16)式,可得前景决策矩阵,如表4所示。

表4 前景决策值

方案	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
$A_1$	0.078 6 - 0.248 2	0.031 2 - 0.133 8	0.125 7 - 0.170 4	0.054 8 - 0.053 2
$A_2$	0.051 8 - 0.369 6	0.054 4 - 0.122 9	0.072 8 - 0.243 3	0.031 3 - 0.109 0
$A_3$	0.059 8 - 0.285 7	0.055 9 - 0.097 6	0.023 9 - 0.330 9	0.004 6 - 0.152 6
$A_4$	0.152 1 - 0.141 7	0.054 7 - 0.122 7	0.136 0 - 0.097 6	0.041 0 - 0.083 9
$A_5$	0.132 9 - 0.134 6	0.065 8 - 0.061 2	0.057 8 - 0.283 1	0.061 7 - 0.081 0

(0.2541,0.1512,0.4884,0.1063)。

决策者给定方案的单属性偏好为 $\varphi(h_{kn}) = (0.3,0.3,0.2,0.2), \forall k,n = 1,2,3,4$ 。当 $a = 10$ 时,修正因子为 $\lambda(h) = (1.648\ 7,1.648\ 7,0.606\ 5,0.606\ 5)$ 。因此,修正权重为 $w^* = (0.407\ 1,0.242\ 3,0.287\ 9,0.062\ 7)$ ,则可得加权犹豫模糊决策矩阵 $Q = JW$ ,如表3所示。

进而,可得每个方案的收益损失比,如表5所示。

表5 收益损失比

方案	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
益损比	0.479 4	0.249 0	0.166 4	0.860 7	0.568 1

由收益比可知,收益比越大,方案越优,排序结果为 $A_4 > A_5 > A_1 > A_2 > A_3$ ,所以选择购买第4种生产线。

## 4 结 论

针对多属性决策过程对方案的犹豫和不确定性,提出了一种基于前景理论的多属性群决策方法。该方法引入专家集对方案的属性值进行匿名评估,并充分考虑决策者的属性偏好,既反映了决策者的主观意愿,又避免了决策者对方案评估时不稳定心理状态的影响。使用构造的熵权计算确定属性权重并进行更新,通过引入前景理论,将方案与理想解的犹豫模糊欧式距离转化为方案的前景值,充分考虑人们在面临风险和收益时的风险偏好、风险厌恶的敏感程度。用收益损失比代替贴合度,并依此对方案进行排序。最后验证了该方法的科学性、可行性及有效性。

## 参考文献:

- [1] Torra V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010,25(2): 529-539
- [2] Xu Zeshui, Zhang Xiaolu. Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision Making Based on TOPSIS with Incomplete Weight Information [J]. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(5): 53-64
- [3] 朱丽, 朱传喜, 张小芝. 基于前景理论的犹豫模糊风险型多属性决策方法[J]. 统计与决策, 2014, (17): 68-71  
Zhu Li, Zhu Chuanxi, Zhang Xiaozhi. Hesitant Fuzzy Risk Multi-Attribute Decision Making Method Based on Prospect Theory [J]. Statistics & Decision, 2014, (17): 68-71 (in Chinese)
- [4] 刘志云, 樊志平. 基于前景理论的具有指标期望的多指标决策方法[J]. 控制与决策, 2015, 30(1): 91-97  
Liu Yunzhi, Fan Zhiping. Multiple Attribute Decision Making Considering Attribute Aspirations: A Method Based on Prospect Theory[J]. Control & Decision, 2015, 30(1): 91-97 (in Chinese)
- [5] 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2637-2644  
Liu Xiaodi, Zhu Jianjun, Liu Sifeng. Bi-Directional Projection Method with Hesitant Fuzzy Information[J]. System Engineering Theory & Practice, 2014, 34(10): 2637-2644 (in Chinese)
- [6] Sun Lingjie, Ma Zhao, Shang Yuwei, et al. Research on Multi-Attribute Decision-Making in Condition Evaluation for Power Transformer Using Fuzzy AHP and Modified Weighted Averaging Combination [J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2016, 10(15): 3855-3864
- [7] Amali Chinnappan, Ramachandran Balasubramanian. Complexity-Consistency Trade-Off in Multi-Attribute Decision Making for Vertical Handover in Heterogeneous Wireless Networks[J]. IET Networks, 2016, 5(1): 13-21
- [8] Lin Hui. An Approach to Linguistic Multi-Attribute Decision Making Based on Risk Preferences of Decision Makers[C]// Chinese Control and Decision Conference, Hefei, China, 2017: 7274-7279
- [9] 李鹏, 刘思峰, 朱建军. 基于前景理论的随机直觉模糊决策方法[J]. 控制与决策, 2012, 27(11): 1601-1606  
Li Peng, Liu Sifeng, Zhu Jianjun. Intuitionistic Fuzzy Stochastic Multi-Criteria Decision-Making Methods Based on Prospect Theory[J]. Control & Decision, 2012, 27(11): 1601-1606 (in Chinese)
- [10] 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658-1664  
Wang Jianqiang, Zhou Ling. Grey-Stochastic Multi-Criteria Decision-Making Approach Based on Prospect Theory [J]. System Engineering Theory & Practice, 2010, 30(9): 1658-1664 (in Chinese)
- [11] 张娟, 党耀国, 李雪梅. 基于前景理论的灰色多指标风险型决策方法[J]. 计算机工程与应用, 2014, 50(22): 7-10  
Zhang Juan, Dang Yaoguo, Li Xuemei. Grey Multi-Criteria Risk Decision-Making Method Based on Prospect Theory [J]. Computer Engineering & Applications, 2014, 50(22): 7-10 (in Chinese)
- [12] 高建伟, 刘慧晖, 谷云东. 基于前景理论的区间直觉模糊多准则决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2014, 34(12): 3175-3181  
Gao Jianwei, Liu Huihui, Gu Yundong. Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Multi-Criteria Decision-Making Method Based on Prospect Theory [J]. System Engineering Theory & Practice, 2014, 34(12): 3175-3181 (in Chinese)
- [13] 王新鑫, 杨雁, 徐泽水, 等. 基于专家对应准则的犹豫模糊多属性群决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2017, 31(1): 101-108  
Wang Xinxin, Yang Yan, Xu Zeshui, et al. Hesitant Fuzzy Multiple Attribute Group Decision Making Method Based on Experts Corresponding Criterion [J]. Fuzzy System & Mathematics, 2017, 31(1): 101-108 (in Chinese)
- [14] Xu Z, Xia M. Hesitant Fuzzy Entropy and Cross Entropy and Their Use in Multi-Attribute Decision-Making [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2012, 27(9): 799-822
- [15] 张丽娅, 李德清. 变权决策中确定状态变权向量的理想点法[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(6): 93-97  
Zhang Liya, Li Deqing. An Ideal Point Approach of Determining State Variable Weights Vector in Decision Making [J]. Practice & Understanding of Mathematics, 2009, 39(6): 93-97 (in Chinese)
- [16] 王雪青, 唐塘. 基于累积前景理论的信息不完全的风险型多准则决策方法[J]. 模糊系统与数学, 2015, 29(3): 137-144  
Wang Xueqin, Tang Tang. Multi-Attribute Decision Making Method under Risk Based on Cumulative Prospect Theory with Incomplete Information [J]. Fuzzy System & Mathematics, 2015, 29(3): 137-144 (in Chinese)

- [17] Xu Z, Xia M. Distance and Similarity Measures for Hesitant Fuzzy Sets[J]. Information Science, 2011, 181(11): 2128-2138
- [18] Xu Z, Xia M. On Distance and Correlation Measures of Hesitant Fuzzy Information[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410-425
- [19] Tversky A, Kahneman D. Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty[J]. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297-323

## A Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Group Decision Making Method Based on Prospect Theory

Sun Peng, Zhang Jun, Zeng Hongbin

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** To solve a multi-attribute group decision-making problem, since its attribute weight is completely unknown, based on the prospect theory, a hesitant fuzzy multi-attribute group decision making method is proposed. According to the single-attribute-preference function provided by a decision maker, an improved entropy weight method is proposed to calculate the attribute weight. The hesitant fuzzy decision-making matrix is transformed into the prospect decision-making matrix which utilizes positive and negative ideal solutions as reference points. Then alternative schemes are ranked according to the ratio of profit to loss. Finally, a numerical example is provided to verify the effectiveness and feasibility of the proposed method.

**Keywords:** multi-attribute group decision making, prospect theory, hesitant fuzzy set, expert weight, fuzzy set, decision making