基于 POD 方法的二维方柱低雷诺数 绕流流场分析研究

王掩刚,陈俊旭,先松川

(西北工业大学 动力与能源学院,陕西 西安 710072)

摘 要:以二维方柱低雷诺数绕流为研究对象 在非定常数值模拟结果的基础上,首先应用本征正交 分解(proper orthogonal decomposition, POD)方法得到特征区域流场的低阶模型,获取 POD 基函数及 时间系数分布规律;其次以 POD 的低阶模型为基础,实现了对非定常物理场的重构。研究结果表明: ①应用文中的数值分析手段,捕捉到了方柱绕流非定常流动特征,且与公开文献结果吻合较好。②对 于文中的研究对象,前4阶 POD 模态所占波动总能量 99.4%,可以用于较准确描述其非定常流场特 征;③各阶 POD 模态的时间系数之间都有明确的频率与相位关系,其中能量最大的第一对 POD 模态 对方柱尾迹流动的波动频率和幅值起决定作用。④在所研究的雷诺数下,前4阶 POD 模态就可以很 好地重构流场,这对以后低阶模型的建立有一定的指导意义。

关 键 词:本征正交分解 .低阶模型 ,方柱绕流 .非定常 中图分类号:0357.1 文献标志码:A 文章编号:1000-2758(2014)04-0612-06

在计算流体力学的应用中,通常求解数学模型 方程组的计算规模庞大、维数较高,对计算机的容量 和速度提出了极高的要求。因此如何在保证足够精 度的条件下对高维或无穷维流体动力系统进行降维 建模成为了计算流体力学领域研究的热点问题,国 内外研究学者为此进行了广泛研究。

本征正交分解 (proper orthogonal Deco-Mposition ,POD) 方法作为一种有效的降维手段,被广泛运 用于流体动力系统的降维建模中。在国外,Favier 等^[1] 通过 POD 降阶模型对圆柱绕流尾迹,以及某翼 型的表面分离流动进行了分析研究,结果表明该方 法可以很好地模拟所研究的流场区域; Siegel 等^[2] 从数值模拟中提取出圆柱绕流瞬态流场在短时间内 的快照 (snapshots) 集合,运用 POD 方法对该流场进 行了分析研究,证实了该方法可以准确的模拟和评 估瞬态流场结构; Scarano 等^[3] 则通过 PIV 技术和 POD 方法研究了入射角对二维的方柱绕流流场的 影响,结果表明该方法可以很好的展现流场的旋涡 脱落过程以及入射角的影响。在国内也有学者对 POD 方法的进行了一定的相关研究。张震宇^[4] 利 用 POD 原理设计了一种针对风力机翼型动态失速 时变过程的辨识方法,结果表明该降阶模型方法能 够以明显降低的计算量精确辨识翼型的浅失速情 况;倪振华、江棹荣等^[5] 基于 POD 近似的时间与空 间分解来预测未知区域的风压时间序列,研究表明 该方法能够有效合理地反映出风压场的时间序列。

综合国内在 POD 方法的相关研究来看.在非定 常流场方面的应用研究相对较少,因此本文基于 POD 方法对二维方柱尾缘特征区域的非定常流场 进行了研究,对求得的 POD 模态以及时间系数进行 了初步分析,并用 POD 模态对原始流场进行了重 构,证实了该方法的可行性,为后续 POD 方法在流 场方面的研究应用提供了一定的参考。

1 计算模型及 POD 模型的构建

1.1 计算模型

计算采用二维方柱为研究对象,方柱的边长 D

收稿日期:2013-09-26 基金项目:国家自然科学基金(51376150)资助 作者简介:王掩刚(1976—),西北工业大学教授、博士生导师,主要从事叶轮机气动热力学研究。 =1 m,计算域为11*D*×30*D*,上游边界距方柱中心 4.5*D*,下游边界距方柱中心25.5*D*,上、下侧边界分 别距方柱中心5.5*D*。在大量网格校验的基础上,计 算网格采用H型网格,网格密度选取370×280,并 在方柱周围以及下游尾迹区域加密,以准确捕捉其 流动细节。

计算工质为空气, 富诺数 Re = 100,采用层流模型; 选用压力基求解器对各控制方程进行求解,压力 速度耦合算法选用 SIMPLE 算法,梯度项选用 least squares cell based 方法; 动量项选用二阶迎风格式。 上游边界指定为速度入口边界条件 u = 0.001 46 m/s p = 0 m/s; 下游边界指定为压力出口边界条件; 方柱表面指定为壁面无滑移边界; 上下边界指定滑 移边界条件 u = 0.001 46 m/s p = 0 m/s。

1.2 POD 简介及模型的构建

本征正交分解(POD)方法由 LumIey^[6]于 1967 年首先引入到湍流相干结构研究中。该方法的基本 思想是把原来在时间域及空间域上连续物理量的 场,写成一个只与时间相关的函数和一个只与空间 相关的函数的展开式序列,且它们在均方意义上是 最优的,在展开式中只需要少量的项数就可较准确 地描述该物理过程,从而可以提供具有足够高精度 而自由度又较少的低维模型,以降低计算维数、节省 计算时间和内存。本文将以上述方柱绕流的非定常 计算模型为基础,运用 POD 方法来构建模型并进行 研究分析。

图 1 中所示的点划线矩形区域即为本文进行 POD 分析的特征区域,区域范围为 *X*: -9.5 ~ -4.5;*Y*: -2 ~ 2。选取该区域的原因在于它是方柱 绕流流动的主要特征区域,能够反映出尾迹脱落涡 的整个演化过程。



图 1 POD 分析的特征区域

针对以上特征区域,在流场稳定周期性波动的 某段时间内,本文选取了该区域中 *N* = 60 个时刻的 瞬态速度场快照(snapshots)集合 U(x y t_i)(i = 1,
2 ;… N)用于建立降维的 POD 空间。定义这组样本的平均值和脉动量分别为:

$$\overline{U} = \langle U \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} U(x \ y \ t_{i})$$
(1)

$$V(x y t_i) = U(x y t_i) - \overline{U}$$
(2)

根据 POD 方法的基本思想,目标是将脉动量 $V(x \ _{\partial} t_i)$ 分解为空间模态 $\varphi_i(x \ _{\partial})$ 与时间系数 $a_i(t)$ 的函数即:

$$V(x \ y \ t_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i(t) \varphi_i(x \ y)$$
(3)

实际上,求解空间模态 $\varphi_i(x)$ 等价于求解以下 最大值问题:

$$\max\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mid (V_i \varphi) \mid^2\right\}$$
(4)

且满足

$$(\varphi \varphi) = \|\varphi\|^2 = 1$$
 (5)

式中: (•,•)和 $\| \cdot \|$ 分别表示内积空间 Ω 上的 L^2 -内积和 L^2 -范数。

利用变分法 ,上述最大值问题可转化为以下特 征值问题:

$$\iint_{\Omega} C(x \ y; x' \ y') \varphi(x' \ y') \, dx' \, dy' = \lambda \varphi(x \ y) (6)$$

式中:

$$C(x \ \vartheta; x^{\prime} \ \vartheta^{\prime}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V_i(x \ \vartheta) V_i(x^{\prime} \ \vartheta^{\prime})$$

i = 1 2 ;…*N*为*V_i*的自相关函数 ,也称 POD 的核;可 以利用原有函数空间快照脉动量的线性组合来表示 空间模态 ,即

$$\varphi_k(x \ y) = \sum_{j=1}^N b_j^k V_k(x \ y)$$
(7)

其中系数 b_i^k 是待定的。

将上(7)式代入(6)式中得以下特征值问题:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_{ij} \boldsymbol{A}_{k} = \lambda \boldsymbol{A}_{k}$$
(8)

式中: $\mathbf{R}_{ij} = \frac{1}{N} (V_i, V_j)$ ($ij = 1, 2, \dots, N$) $\mathbf{A}_k = [b_1^k, b_2^k, \dots, b_N^k] (k = 1, 2, \dots, N)$ 。由于矩阵 \mathbf{R} 是一个 对称矩阵,因而存在着对应特征值 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \lambda_N$ ≥ 0 的一组完备的正交特征向量基 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_N$ 。 由此便求得了 POD 基函数空间可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{span}(\varphi_1 \; \varphi_2 \; ; \cdots \; \varphi_N) \tag{9}$$

用上述方法求解出的各阶特征值 λ_i 占所有特 征值之和的比例大小都有明确的物理意义 ,它代表 着对所求系统总能量的贡献能力^[7],该动力学系统的总能量可表示为各阶特征值之和 $E = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$,每一阶所占能量的百分比即为 $E_i = \lambda_i / E_o$

为使模型简化,可以通过定义相关能量信息来 忽略小特征值所对应的 POD 模态,选择一个维数是

$$M(\ll N)$$
 低维基向量空间。定义 $E(k) = rac{\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i}$ 选取

M使得 $E(M) \ge \sigma \sigma$ 一般选取略小于1以捕获快照 集合的大部分能量。

基于上面所求的 *M* 个 POD 模态 原速度场的降 维模式可以表示为

$$U^{\text{POD}}(x \ y \ t_i) = \overline{U} + \sum_{i=1}^{M} a_i(t) \varphi_i(x \ y) \quad (10)$$

以上便得到了由 $M \land POD$ 基函数扩展成的降维空间,使其在降维空间里求解。用 Galerkin 逼近将模式方程投影到 POD 基函数扩张成的降维空间中,得到求解时间系数 $a_i(t)$ 的常微分方程组,便可求得时间系数 $a_i(t)$ 最终得到 POD 的低阶模型。

2 数值模拟结果及 POD 分析

2.1 数值模拟结果

图 2 和表 1 是通过上述计算模型得到的方柱绕 流非定常数值模拟的结果。





参数	本文计算结果	文献[8]	文献[9]
$C_{l \ rms}$	0. 189 0	0.1897	0.148 0
\overline{C}_d	1.655	1.560	1.510
St	0. 140	0. 160	0. 147

图 2 所示为方柱的升阻力系数时程曲线,其中 横坐标轴的无量纲化时间 $t' = t \times U_0/L$,其中 U_0 为 来流速度 L 为特征长度。由图中可以看出计算趋于 稳定以后升阻力系数随时间周期性变化,说明流场 发生了周期性波动,代表着方柱尾缘后的旋涡周期 性脱落过程。表 1 为方柱的升力系数均方根值 $C_{l,ms}$ 、 阻力系数平均值 \overline{C}_d 以及斯特劳哈数 St 的数值模拟 结果及文献中的结果对比。由对比结果可知,本文 的数值模拟结果和相关文献的结果十分接近,从而 证明了本文数值模拟方法的正确性与可靠性,这为 POD 方法对计算流场的分析研究提供了保证。

2.2 POD 结果分析

图 3 所示为(8) 式中矩阵 **R** 的特征值 λ_i 按照从 大到小的顺序排列;此处仅显示了前 30 阶特征值。 图中横坐标为特征值的阶数 *i* 纵坐标是以对数坐标 形式表示的各阶所占总能量的比例 $\lambda_i / \sum_{i=1}^{60} \lambda_i$ 。



图 3 各阶 POD 模态的能量分布

由图 3 可以看出,所计算出的特征值均成对出现,而且一对特征值所占的能量基本相同。其中第一对 POD 模态所占总波动能量的比例分别为51.62%与44.08%,而剩下的 POD 模态分别所占总能量比例均不大于2%。第二对 POD 模态则与相对较低能量的高次谐波相关^[7],而更高阶的 POD 模态则是包含了流体运动中的更高次谐波。

根据之前 E(k)的定义可以得出前 2 阶 POD 模态占总能量的比例为 95.7%,一大部分的流动动能均包含在前 2 阶模态当中;前 4 阶 POD 模态所占总能量的比例已高达 99.4%。由此可以看出前 4 阶 POD 模态已经完全可以抓住流场流动的主要特征,因此本文仅给出前 4 阶 POD 模态的速度基函数图像,并对前 4 阶 POD 的相关结果进行了初步分析以及对非定常流场的重构。

图 4 分别给出了 POD 分析中所占能量比例较

高的前 2 个模对相应的时间系数 $(a_1 \ \mu_2)$ 、 $(a_3 \ \mu_4)$ 随无量纲化时间的变化曲线。从图中可以看出:时间 系数基本都是呈正余弦曲线的变化趋势,且每个模 对中 2 个时间系数的频率及振幅基本相同,其中时 间系数 a_1 、 a_2 的变化周期为旋涡脱落周期的 1/2;由 图 5a) ~ 图 5c) 还可以得到每个模对的 2 个时间系 数相位差为 $\pi/2$,幅值随着模对阶数提高而减小, 但第一个模对的时间系数幅值占主导地位。据此, 可以推测:对于方柱绕流的尾迹旋涡流动 随着旋涡 的生成、发展和消亡,在微尺度上存在着多个相同频 率和幅值、但旋转相位有差异的对旋涡对(counterrotating vortex)。能量最大的第一阶涡对决定了尾 迹流动的波动频率和幅值,低能量的高阶涡对则影 响着流场的细微结构。



图4 前4阶时间系数随时间 t⁻的变化

为了清楚地看到不同模对时间系数的相互关系 [图 5 给出了 POD 分析中前 3 个模对相应的时间 系数 *a*_i 在 60 个时刻点相关的利萨如图形。不同的 时间系数合成轨迹为封闭的图形 ,且频率比满足如 下关系式:

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y}$$

式中: f_x 、 f_y 分别为 2 个信号的频率 n_x 、 n_y 分别为利 萨如图形的外切水平线和垂直线的切点数。从图 5d) ~ 图5f) 可看出: a_1 、 a_4 的频率比值为 1: 2; a_1 、 a_5 的频率比值为 1: 3; a_4 、 a_6 的频率比值为 2: 3。应 用利萨如图形在不同频率信号叠加时其形状与相位 关系可以得出:时间系数 $a_1 = 5 = a_4 \cdot a_5$ 的等效相位差 均为 $n\pi/2$ ($n = 1 \ 3 \ 5 \cdots$) ,而时间系数 $a_4 = 5 a_5$ 的等 效相位差 $n\pi/4$ ($n = 1 \ 3 \ 5 \ \cdots$)。

通过以上分析,得到了前3个模对中的6个时 间系数之间的频率及其相位关系。对于一个复杂的 旋涡流场来说,各阶旋涡波动共存,并且相互干涉。 通过获取各阶波动的关联关系,如果能够对相对较 低能量的波动实施干扰,控制流动细微结构,从而实 现旋涡运动的宏观改善,这对于复杂流动的主动控 制技术有一定的参考价值。



图 5 时间系数的利萨如图形

2.3 基于 POD 结果的流场重构

基于上述分析,对于本文所研究的低雷诺数条 件下的方柱绕流,前4阶POD模态表征了绝大部分 的流场能量,为了做进一步验证,下文通过前4阶 POD模态对流场进行了重构,并比较了不同阶数的 POD模态对流场的重构效果。

图 6 和图 7 给出了应用 POD 方法构造的速度 分量前四阶 POD 基函数等值线云图。由图中可以 看到成对的相似模式和空间变化,这与方柱绕流尾 部典型旋涡脱落的对流特点有关。对于流向速度 *u* 而言,前 2 阶 POD 模态在横向出现了正负交替的反 对称涡核结构,流向则是正负交替的涡核;3 阶和 4 阶 POD 模态在横向呈现对称结构 ,流向则出现正负 交替的涡核。对于横向速度 v 而言 ,前 2 阶 POD 模 态显示出横向完全对称 ,流向交替出现的涡核结构; 3、4 阶 POD 的模态则在横向表现为反对称 ,流向交 替出现的涡核结构。这一结果与 Van Oudheusden B W 等^[3]、Ben Chiekh M 等^[7]分析结果基本一致。



图 6 流向速度 u 的前 4 阶 POD 基函数等值线云图



图 7 横向速度 v 的前 4 阶 POD 基函数等值线云图

应用(10)式,根据平均流场 \overline{U} ,POD 基函数及 对应的时间系数重构方柱绕流尾迹流动结构,对比 不同 POD 阶数对原始流场的构建效果。图 8 为某 一时刻原始流场与用不同阶数 POD 模态重构结果

参考文献:

的速度等值线云图对比。从图中可以看出前文所分 析的前4阶 POD 模态对流场的重构结果与原始流 场差别很小,基本可以抓住流场的主要特征;同时随 着使用的 POD 模态阶数不断提高,对原始流场细微 结构的表达方面则更加清楚。此外,通过 POD 方法 该对特征区域一个周期内的不同时刻进行重构便可 以完整重现出旋涡生成与脱落的演化过程。



图 8 原始流场与不同阶数 POD 重构结果对比

3 结 论

本文的研究结果表明:

 应用本文的数值分析手段,捕捉到了方柱绕 流非定常流动特征,且与公开文献结果吻合较好。

2) 对于本文的研究对象,前4阶 POD 模态所 占波动总能量为99.4%,可以用于较准确描述其非 定常流场特征。

3) 各阶 POD 模态的时间系数之间都有明确的 频率与相位关系,其中能量最大的第一对 POD 模态 对方柱尾迹流动的波动频率和幅值起决定作用,这 对于流动分析控制有一定的参考价值。

4)在所研究的雷诺数下,前4阶POD模态就可以很好地重构流场,这对以后低阶模型的建立有 一定的指导意义。

 ^[1] Favier J , Cordier L , Kourta A. Accurate POD Reduced-Order Models of Separated Flows [J]. Physics of Fluids , 2007 , 8(3): 259-265

- [2] Siegel S , Cohen K , Seidel J , et al. Short Time Proper Orthogonal Decomposition for State Estimation of Transient Flow Fields [C]//43rd AIAA Airspace Sciences Meeting and Exhibit , 2005: 296
- [3] Van Oudheusden B W, Scarano F, Van Hinsberg N P, et al. Phase-Resolved Characterization of Vortex Shedding in the Near Wake of a Square-Section Cylinder at Incidence [J]. Experiments in Fluids, 2005, 39(1): 86-98
- [4] 张震宇.风力机翼型动态失速的 POD 模型降阶方法 [J].南京航空航天大学学报, 2011, 43(5): 577-580 Zhang Zhenyu. Reduced-Order POD Model for Dynamic Stall of Wind Turbine Airfoils [J]. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 43(5): 577-580 (in Chinese)
- [5] 倪振华,江棹荣,谢壮宁.本征正交分解技术及其在预测屋盖风压场中的应用 [J].振动工程学报,2007,20(1):1-8 Ni Zhenhua, Jiang Zhaorong, Xie Zhuangning. POD Technique and Its Application to Prediction of Wind Pressure Fields on Roof [J]. Journal of Vibration Engineering,2007,20(1):1-8 (in Chinese)
- [6] Lumley J L. The Structure of Inhomogeneous Turbulent Flows. // Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation [M]. Yaglom AM, Tatarski VI. Nauka, Moscow, 1967: 166–178
- [7] Ben Chiekh M, Michard M, Guellouz M S, et al. POD Analysis of Momentumless Trailing Edge Wake Using Synthetic Jet Actuation [J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2012, 46: 89–102
- [8] 余化军.圆柱和方柱绕流及矩形柱涡激振动的二维数值分析[D].天津大学,2012 Yu Huajun. Two Dimensional Numerical Analysis of Flow over a Circular and Square Cylinder and Vortex-Induced Vibration of Rectangular Cylinder [D]. Tianjin: Tianjin University,2012 (in Chinese)
- [9] Singh A P , De A K , Carpenter V K , et al. Flow Past a Transversely Oscillating Square Cylinder in Free Stream at Low Reynolds Numbers [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids , 2009 , 61(6): 658-682

Analysis of Square Cylinder Unsteady Flow at Low Reynolds Number with POD Method

Wang Yangang , Chen Junxu , Xian Songchuan

(Department of Aero-Engines , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China)

Abstract: Working on a two-dimensional simulation of flow around a square cylinder at Reynolds number of 100, first we obtained the POD reduced order model of the characteristic region of the flow field, then we acquired the distribution of POD modes and temporal coefficients, and finally we reconstructed the original physical field on the basis of the POD reduced order model. The results and their analysis show preliminary that: (1) according to the numerical method applied in this paper, we captured the unsteady flow dynamic characteristics of flow around square cylinder and the results are consistent with literature; (2) for the research object of this paper, the first four POD modes, which accounted for 99.4 percent of total energy fluctuations can describe the characteristics of the unsteady flow field accurately; (3) the time coefficients of each POD mode have definite frequency and phase relationship, and the first pair of POD modes with the biggest energy decide the flow fluctuation frequency and amplitude of square cylinder wake; (4) for the research of Reynolds number in this paper, the first four POD modes can reconstruct the flow field very well, providing certain significance for the future establishment of POD reduced order model.

Key words: computer simulation, drag coefficient, flow fields, mathematical models, numerical methods, Reynolds number, unsteady flow; flow around a square cylinder, proper orthogonal decomposition (POD), reduced order model