

# 斜齿轮实际齿面接触分析技术

蒋进科, 方宗德, 苏进展

(西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:** 基于三坐标测量的齿面网格节点偏差, 经过三次 B 样条拟合得到法向偏差曲面, 通过理论齿面与偏差曲面叠加构造斜齿实际齿面, 推导了齿面法矢、齿面接触与边缘接触; 编制了 1 套斜齿轮 TCA 程序, 能够对各种实际齿面进行 TCA 仿真; 通过齿向和三维修形算例验证了方法的正确性, 为斜齿轮实际齿面接触分析提供了新方法。

**关键词:** 斜齿轮; 误差曲面; 实际齿面; 齿面接触分析; 齿面网格; 坐标测量; 三次 B 样条  
**中图分类号:** TH132      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1000-2758(2013)06-0921-05

传统的渐开线圆柱齿轮在实际应用中缺乏容错能力, 易产生振动与破坏, 因此高速重载齿轮广泛运用了齿面修形技术, 以点接触的修形齿面代替了线接触的渐开线齿面, 已广泛应用于航空、航海等高速领域<sup>[1-3]</sup>。修形齿面的测量是修形技术的重要组成部分。传统的齿面测量是在齿高中部和齿宽中部分别测量齿向和齿廓形状, 参照标准渐开线螺旋面获得修形量和误差量, 然而由于修形齿面的复杂性, 这样的测量方法已不能满足修形设计和加工要求。三坐标测量技术曾经应用于螺旋齿锥齿轮等复杂齿面, 现已被借鉴应用于圆柱齿轮齿面测量。例如, 航空航海等重要应用场合的圆柱齿轮, 精度高达 3 级, 对啮合性能的要求极高, 修形齿面设计很复杂, 必须要建立基于齿面坐标测量(包括修形和误差)的实际齿面模型, 并进行啮合性能的仿真和分析, 为修形设计奠定理论基础。

齿轮接触分析即 Tooth Contact Analysis (TCA) 技术已普遍应用于各种齿轮<sup>[4-10]</sup>, 但斜齿轮修形齿面的形成过程都是遵循传统机床加工原理(基于传统齿轮啮合理论, 通过修形刀具, 经过坐标变换获得), 所形成的齿面过于理论化, 无法计算加工过程中的不确定性误差。Zhang Y 等<sup>[11]</sup>用理论齿面与误差曲面叠加构造了真实齿面, 对准双曲面 TCA 做了研究。孙殿柱<sup>[12]</sup>通过三次 Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) 对测量实际弧齿锥齿轮齿面进行

拟合, 提出了用零间隙法和相切法求解真实齿面啮合点的方法。由于实际齿面已不能用理论齿面方程表示, 又无法脱离理论齿面, 为此作者通过对齿面进行了网格划分, 获得基于三坐标测量的网格节点偏差, 经过双三次 B 样条拟合得到法向偏差曲面, 与理论齿面叠加构造斜齿轮实际齿面, 推导其法矢, 最后以 1 对斜齿轮副, 大轮为理论齿面(无修形), 小轮用给定的不同的偏差曲面构造实际齿面, 仿真了齿轮副接触过程。

## 1 实际齿面构造

### 1.1 实际齿面表达

实际齿面磨合后为光滑曲面, 直接将采样的三坐标数据通过 NURBS 拟合实际齿面, 往往很难达到高精度要求, 而且这种数字化齿面进行 TCA 分析时, 迭代太多, 计算效率较低, 作者通过理论齿面与法向偏差曲面叠加构造实际齿面。齿面偏差的整体描述文献<sup>[13]</sup>做了介绍: 按照图 1a) 网格节点通过三坐标测量获得齿面法向误差如图 1b)。

实际齿面法矢和位矢表示如下:

$$\mathbf{R}_r(u_1, l_1) = \delta(u_1, l_1) \mathbf{n}_1(u_1, l_1) + \mathbf{R}_1(u_1, l_1) \quad (1)$$

$$\mathbf{N}_{1r} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \delta}{\partial u_1} \mathbf{n}_1 + \frac{\partial \mathbf{n}_1(u_1, l_1)}{\partial u_1} \delta \right) \times$$

$$\left( \frac{\partial R_1}{\partial l_1} + \frac{\partial \delta}{\partial l_1} n_1 + \frac{\partial n_1(u_1, l_{a1})}{\partial l_1} \delta \right) \quad (2)$$

式中:  $R_1$ 、 $n_1$  为理论齿面位矢及法矢;  $R_{1\gamma}$ 、 $n_{1\gamma}$  为实际齿面位矢及法矢;  $\delta$  偏差量;  $u_i$ 、 $l_i$  齿面参数  $i=1, 2$  下标“1”和“2”分别指主动小轮、被动大轮。

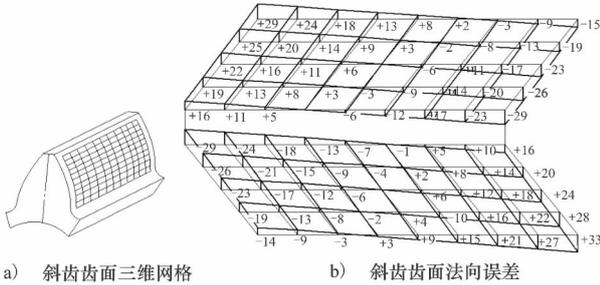


图 1 齿面网格与实际齿面的偏差

### 1.2 偏差曲面拟合与实际齿面法矢计算

对于高精度齿轮, 齿面偏差一般小于  $50 \mu\text{m}$ , 拟合精度要求小于  $1 \mu\text{m}$ 。B 样条曲面由多片曲面片光滑连接而成, 为隐式表达式, 曲面自由度较高, 因此采用双三次 B 样条对齿面网格节点偏差  $m \times n$  个数据进行拟合, 样条曲面拟合算法见文献 [14], 曲面片表达式为:

$$\begin{cases} \delta'_{ij}(u, v) = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M V_{ij} M^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\ u = \frac{x}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \\ v = \frac{y}{y_{j+1} - y_j}, \quad y \in [y_j, y_{j+1}] \end{cases} \quad (3)$$

式中:  $(x_i, y_i)$  为旋转投影面网格节点坐标, 齿面  $V_{ij}$  为控制点  $4 \times 4$  子矩阵  $i=1 \dots m-1, j=1 \dots n-1$ ;  $M$  为常量矩阵。

样条拟合的曲面边界是确定的, 三坐标采样的数据通常在边界之内, 因此可通过对外插值, 将矩形网格边界数据延伸到整个齿面边界, 这对反算的控制矩阵影响很小, 与边界相邻的曲面片变化很小, 对齿面内其他曲面片影响可以忽略不计, 因此可保证齿面接触分析的精度。

理论齿面用齿条刀具展成, 拟合的偏差曲面  $\delta'(x, y)$  为旋转投影面上数值, 旋转投影面与理论齿面关系:

$$x = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$y = R_z \quad (4)$$

式中:  $R_x$ 、 $R_y$ 、 $R_z$  分别为理论齿面位矢坐标分量。

求解实际齿面法矢时用到偏差曲面沿齿条刀具参数  $(u_1, l_1)$  方向的切矢, 计算过程如下:

$$\frac{\partial \delta(u_1, l_1)}{\partial u_1} = \frac{\partial \delta'(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{\partial \delta'(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u_1} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \delta(u_1, l_1)}{\partial l_1} = \frac{\partial \delta'(x, y)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l_1} + \frac{\partial \delta'(x, y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l_1} \quad (6)$$

## 2 齿面接触分析

将小轮、大轮的齿面位矢及单位法矢表示于安装坐标系中如图 2 所示, 啮合过程中, 两齿面连续相切接触, 在固定坐标系中, 任意时刻两齿面都有公共接触点, 且公共接触点处都有公法线, 即:

$$\begin{cases} M_{f1}(\phi_1) R_{1r}(u_1, l_1) - M_{f2}(\phi_2) M_{e2} R_2(u_2, l_2) = 0 \\ L_{f1}(\phi_1) N_{1r}(u_1, l_1) - L_{f2}(\phi_2) L_{e2} n_2(u_2, l_2) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

取  $\phi_1$  为输入量, 求解以  $u_1, l_1, u_2, l_2, \phi_2$  为未知量的方程组, 得到两齿面的 1 个接触点。

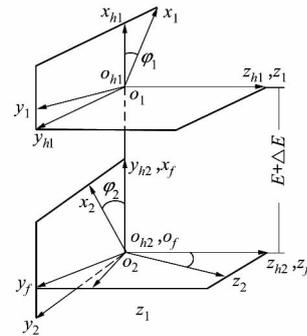


图 2 1 对齿轮啮合的坐标关系

式中:  $M_{e2}$  为大小轮轴线安装误差矩阵;  $M_{fi}$ 、 $L_{fi}$  为齿面动坐标系到固定坐标系的转化矩阵;  $\phi_1$ 、 $\phi_2$  为小轮、大轮转角;  $E$ 、 $\Delta E$  为安装中心距及误差;

斜齿轮在啮入啮出时有边缘接触, 包括齿侧边缘接触和齿顶边缘接触, 在接触点处, 沿边缘的切线与接触齿面在该点的法线垂直, 小轮左右齿侧边缘接触时  $l_1$  为常数, 接触方程为:

$$\begin{cases} M_{f1}(\phi_1) R_{1r}(u_1, l_1) - M_{f2}(\phi_2) M_{e2} R_2(u_2, l_2) = 0 \\ \left( L_{f1} \frac{\partial R_{1r}}{\partial u_1} \right) \cdot (L_{f2}(\phi_2) L_{e2} n_2(u_2, l_2)) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

小轮齿顶边缘接触时,  $u_1$  为常数, 接触方程为:

$$\begin{cases} M_{j1}(\phi_1) R_{1r}(u_1, l_1) - M_{j2}(\phi_2) M_{e2} R_2(u_2, l_2) = 0 \\ \left( L_{j2} \frac{\partial R_{1r}}{\partial l_1} \right) \cdot (L_{j2}(\phi_2) L_{e2} n_2(u_2, l_2)) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

给定  $\phi_1$  可以解出相应的其他 4 个未知参数, 确定接触点。大轮边缘接触时, 也可推到类似的方程。对于每个瞬时接触点, 可以分别确定相应的主曲率与主方向, 确定啮合印痕。传动误差表示被动齿轮实际转角偏离理论转角之值, 随主动齿轮转角的变化, 表达式为:

$$\psi(\phi_1) = (\phi_2 - \phi_2^0) - (\phi_1 - \phi_1^0) \frac{N_1}{N_2} \quad (10)$$

式中:  $\phi_1^0, \phi_2^0$  为小轮、大轮初始转角;  $N_1, N_2$  为小轮、大轮的齿数。

实际齿面 TCA 分析步骤如下所示:

- 1) 输入齿轮基本参数与法向偏差量点阵  $P_{ij}(x, y, \delta)$ ;
- 2) 展成理论齿面位矢  $R_1(u_1, l_1)$  及法矢  $n_1(u_1, l_1)$ ;
- 3) 双三次 B 样条拟合  $P_{ij}$  为偏差曲面  $\delta(u, v)$ , 并拓扑曲面边缘;
- 4) 通过理论齿面参数  $(u_1, l_1)$  求解旋转投影面参数  $(x, y)$ , 并计算  $x$  对  $u_1, l_1$  偏导  $y$  对  $u_1, l_1$  偏导;
- 5) 归一化参数  $(x, y)$ , 确定参数  $(u, v)$ , 通过  $\delta(u, v)$  确定及  $\delta'$  并计算  $\delta'$  对  $x, y$  偏导;
- 6) 求解真实齿面位矢  $R_{1y}(u_1, l_1)$  及法矢  $n_{1y}(u_1, l_1)$ ;
- 7) 求解 TCA 方程, 计算齿面印痕及传动误差;
- 8) 是否超出边界, 如未超出边界跳转至步骤 4)。

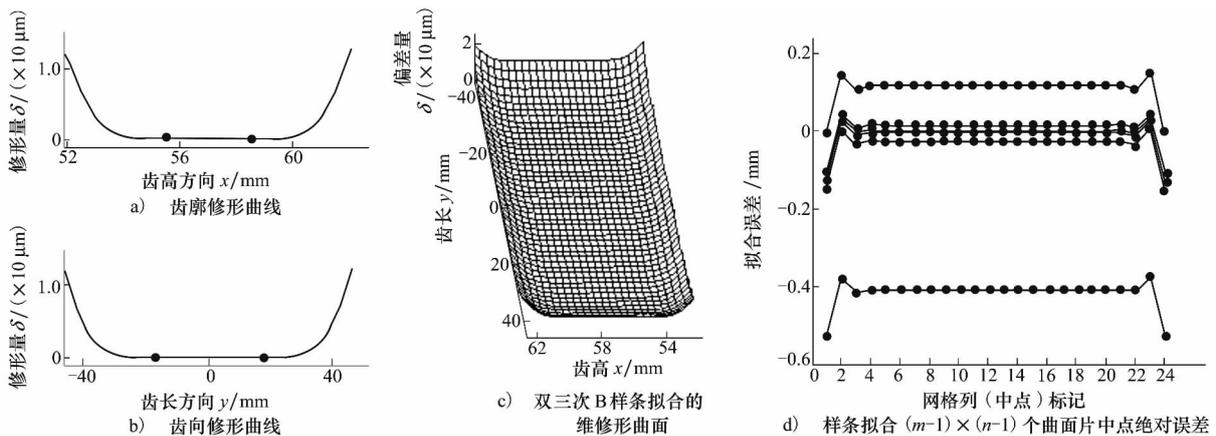


图 3 小轮双三次 B 样条拟合的偏差曲面与拟合误差

### 3 实际齿面 TCA 仿真

以表 1 标准安装齿轮副为例, 通过 matlab 软件编写实际齿面 TCA 程序, 将小轮齿面按照齿高、齿向均匀划分为  $9 \times 15$  个点阵, 按照齿廓、齿向的四次抛物修形曲线, 其中  $ab, cd$  段为抛物线修形,  $bc$  段为不修区域(见图 3a)、图 3b)) 构造三坐标测量的法向偏差点阵数据, 经过双三次 B 样条拟合的三维修形曲面如图 3c) 所示。单独的齿廓、齿向修形曲面为二次柱面, 鉴于篇幅, 没有给出拟合曲面。图 4 为齿向抛物线修形仿真结果, 不修形区域为渐开线齿面, 接触路径沿节圆分布, 修形段产生齿顶边缘接触(见图 4a), 空载传动误差增大(见图 4b)。图 5 为三维修形结果, 沿齿廓、齿向方向  $bc$  区域为理论齿面, 因此齿面接触路径沿节圆分布, 几何传动误差为 0,  $ab, cd$  修形区域印迹减少传动误差增大, 且无边缘接触(见图 5a)、图 5b); 有安装误差时, 接触路径偏离节圆, 几何传动误差基本不变(见图 5c)、图 5d), 与文献[15]三维拓扑修形 TCA 仿真结果基本一致, 可验证方法正确性。图 6 为有螺旋线偏差时的 TCA 仿真结果, 这里用沿齿向二次抛物线修形曲线代替螺旋线偏差(见图 6a), 可见有螺旋线偏差时, 接触过程为齿端边缘→齿面→齿顶边缘接触现象(见图 6b), 传动误差曲线的非对称(见图 6c)将导致啮入端或啮出端齿面偏载现象。图 4~图 6 齿面仿真结果与文献[15]基本一致, 可验证方法的正确性。

表 1 斜齿齿轮副参数

齿数	模数/mm	压力角/(°)	螺旋角/(°)	齿宽/mm
17/44	6	20	24.43	92

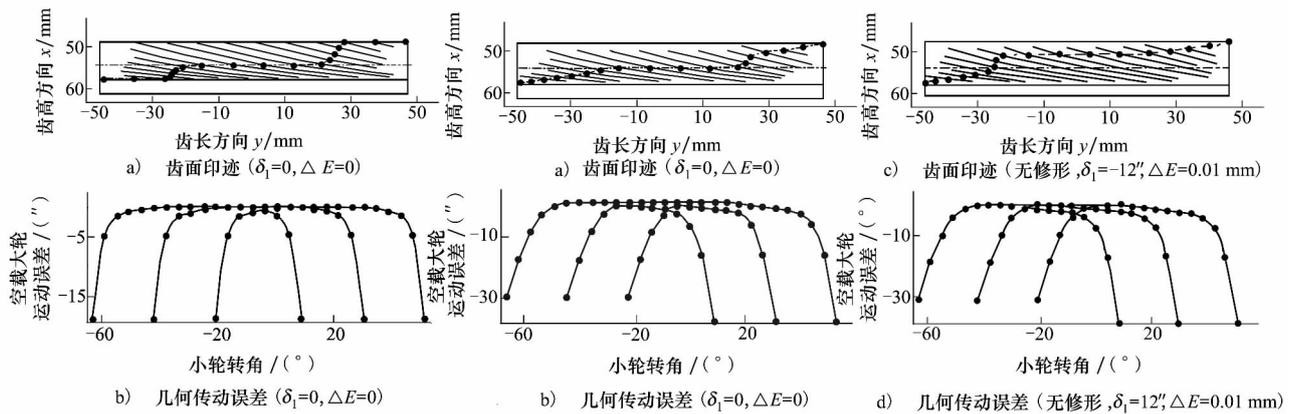


图 4 齿向修形斜齿轮齿面印迹与传动误差

图 5 三维修形斜齿轮齿面印迹与传动误差

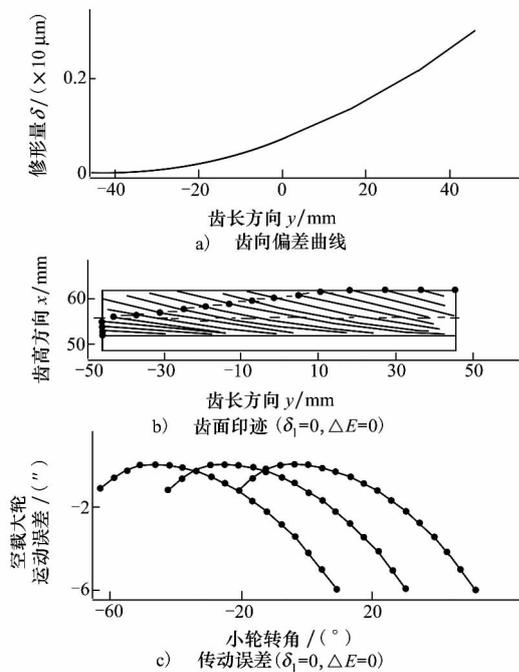


图 6 有螺旋线偏差的斜齿轮齿面印迹与传动误差

### 4 结 论

1) 通过齿面网格节点偏差点阵,经过三次 B 样条拟合得到法向偏差曲面,与理论齿面叠加构造斜齿轮实际齿面,推导其法矢,相对直接通过复杂曲面拟合实际齿面进行 TCA 仿真,提高计算效率和拟合精度,简化了实际齿面 TCA 计算。

2) 渐开线圆柱齿轮边缘接触对接触齿轮副的重合度有很大影响,不可忽略,文中对齿顶、齿侧边缘接触做了推导;齿轮齿廓修形易产生齿端边缘接触,齿向修形易产生齿顶边缘接触,三维修形可以有效避免边缘接触。

3) 该方法可用于仿真各种加工误差和修形条件下的齿面接触分析,为圆柱齿轮实际齿面接触分析,提供了新的方法。

### 参考文献:

[1] Qi Fan. Computerized Design of New Type Spur, Helical, Spiral Bevel and Hypoid Gear Drives. Master Degree Dissertation, University of Illinois, Chicago, 2002, 20-22

[2] 沈云波, 方宗德, 赵宁, 等. 斜齿面齿轮几何传动误差的设计. 航空动力学报, 2008, 16(3): 2148-2152  
Shen Yunbo, Fang Zongde, Zhao Ning, et al. Design of Geometry Transmission Errors of Helical Face Gear Drive. Journal of Aerospace Power. 2008, 16(3): 2148-2152 (in Chinese)

[3] 方宗德, 杨宏斌, 邓效忠. 弧齿锥齿轮齿面优化修正及计算机仿真. 航空动力学报, 2012, 17(1): 140-144  
Fang Zongde, Yang Hongbing, Deng Jiaozhong. Optimal Tooth Surface Correction of Spiral Bevel Gears and Computerized Simulation. Journal of Aerospace Power, 2012, 17(1): 140-144 (in Chinese)

- [4] 王成, 方宗德, 贾海涛, 等. 人字齿轮修形优化设计. 航空动力学报, 2009, 24(6): 1443-1435  
Wang Cheng, Fang Zongde, Jia Haitao, et al. Modification Optimization of Double Helical Gears. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(6): 1443-1435 (in Chinese)
- [5] Litvin F L. Design Generation and Stress Analysis of Face Gear Drive with Helical Pinion. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194: 3870-3901
- [6] Litvin F L. Modified Involute Helical Gears Computerized Design, Simulation of Meshing and Stress Analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2003, 192: 3619-3655
- [7] Litvin F L, Qi Fan. Computerized Generation and Simulation of Meshing of Modified Spur and Helical Gears Manufactured by Shaving. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190: 5037-5055
- [8] Alfonso F, Hiroyuki N, Litvin F L. Computerized Design of Modified Helical Gears Finished by Plunge Shaving. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199: 1677-1690
- [9] 方宗德. 修形斜齿轮的轮齿接触分析. 航空动力学报, 1997, 12(3): 247-250  
Fang Zongde. Tooth Contact Analysis of Modification of Helical Gears. Journal of Aerospace Power, 1997, 12(3): 247-250 (in Chinese)
- [10] 方宗德. 修形斜齿轮承载接触分析. 航空动力学报, 1997, 12(3): 251-254  
Fang Zongde. Optimal Design of 3-D Modification of Helical Gears. Journal of Aerospace Power, 1997, 12(3): 251-254 (in Chinese)
- [11] Zhang Y, Litvin F L. Computerized Analysis of Meshing and Contact of Gear Real Tooth Surfaces. Journal of Mechanical Design, 1994, 116: 677-681
- [12] 孙殿柱. 真实齿面啮合理论. 北京: 科学出版社, 2006, 90-109  
Sun Dianzhu. Meshing Theory of Real Tooth Surfaces. Beijing: Science Press, 2006, 90-109 (in Chinese)
- [13] Lin C Y, Tsay C B, Fong Z H. Computer-Aided Manufacturing of Spiral Bevel and Hypoid Gears with Minimum Surface Deviation. Mech Mach Theory, 1998, 33(6): 785-803
- [14] 朱心雄. 自由曲线曲面造型技术. 北京: 科学出版社, 2000, 113-136  
Zhu Xinxiong. The Free Curve and Surface Modeling Technology. Beijing: Science Press, 2000, 112-136 (in Chinese)
- [15] Ignacio Gonzalez Perez, Litvin F L, Kenichi Hayasaka. Modified Surface Topology of Involute Helical Gears Developed for Improvement of Bearing Contact and Reduction of Transmission Errors. ASME: International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. Long Beach, California USA, 2005, 1-16

## Tooth Contact Analysis( TCA) of Real Helical Gear Tooth Surface

Jiang Jinke, Fang Zongde, Su Jinzhan

(Department of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** An approach application of gear meshing theory for calculating tooth working-surface contact, tooth edge contact and normal vector of helical gear real tooth surface is proposed to improve the transmission properties of drive gear. We represented the real tooth surface with a sum of two vector functions that determine the theoretical tooth surface and the deviation surface fitted by 3 B splines based on tooth surface mesh data from 3-dimensional coordinate measuring machine, and the normal vector of the deviation surface was deduced, having drawn up a set of calculation procedures, which simulate TCA of the helical gear tooth with various deviation surfaces. The model is proved to be correct when applied to gear drive of pinion with longitudinal and three-dimensional adding deviation surfaces, and provides a new method for TCA of real helical gear tooth surface.

**Key words:** helical gear; deviation surface; real tooth surfaces; tooth contact analysis( TCA); tooth mesh; coordinate measuring machines; 3 B splines