基于 FCE 方法的超声速机翼厚度分布优化

关晓辉，李占科，宋笔锋

（西北工业大学 航空学院，陕西 西安 710072）

摘 要：远场组元（Far-field Composite Element，FCE）激波阻力优化方法是基于类别形状函数变换（Class Shape Transformation，CST）参数化方法发展出的一种超声速飞行器气动外形优化方法。文章使用 CST 参数化方法对超声速客机的大后掠机翼进行外形参数化，并以机翼容积和局部相对厚度为约束条件，使用 FCE 方法对其厚度分布进行以激波阻力最小为设计目标的快速优化。与原机翼相比，FCE 优化方法使机翼激波阻力系数降低达 61%，是超声速飞行器概念设计阶段降低激波阻力十分有用的优化方法。

关 键 词：FCE，CST，超声速飞行器，减阻，参数化，外形优化
中图分类号：V224 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-2758（2012）02-0169-06

超声速机翼厚度分布对激波阻力系数的影响十分显著。在超声速飞行器设计过程中，机翼的厚度分布需要进行十分详细的设计和优化。

传统的气动外形参数化方法通常需要大量的设计参数来表示重要气动特征，如翼型的前、后缘形状。Kufan 和 Bussoletti 提出用类别形状函数变换（Class Shape Transformation，CST）来表示飞行器的几何外形。这种参数化表示方法参数少，精度高，并且在处理一些重要的设计参数（如翼型前缘半径、尾锥角和后缘厚度等）时十分直观方便。远场组元（Far-field Composite Element，FCE）激波阻力优化方法是基于 CST 参数化方法发展出的一种超声速飞行器气动外形优化方法。这种方法使用超声速面积率进行激波阻力计算，结合拉格朗日乘子法进行优化参数的计算，无需迭代且计算速度快，是超声速飞行器概念设计阶段降低激波阻力的一种十分有用的气动外形优化方法。

本文采用 CST 参数化方法对超声速机翼进行几何外形的参数化，并以机翼容积和局部相对厚度为约束条件，使用 FCE 方法对其厚度分布进行以激波阻力最小为目标的快速优化，大幅降低了机翼的激波阻力系数。本文的研究对超声速机翼设计具有一定的指导和参考价值。

1 超声速机翼参数化

1.1 CST 参数化方法的基本原理

CST 参数化表示方法使用一个类别函数 $C_{N2}^{N1}(\psi)$ 和一个形状函数 $S(\psi)$ 来表示一个后缘封闭的翼型

$$\zeta(\psi) = C_{N2}^{N1}(\psi)\, S(\psi) \tag{1}$$

式中 $\zeta = z/c$，$\psi = x/c$，c 为翼型弦长。

若翼型后缘不封闭，则在（1）式的基础上添加一个后缘厚度项，得后缘不封闭的翼型公式

$$\zeta(\psi) = C_{N2}^{N1}(\psi)\, S(\psi) + \psi \cdot \Delta\zeta_{te} \tag{2}$$

类别函数 $C_{N2}^{N1}(\psi)$ 定义为

$$C_{N2}^{N1}(\psi) = \psi^{N1}(1-\psi)^{N2} \tag{3}$$

$N1$ 和 $N2$ 定义了所表示的几何外形的类别。*NACA* 系列圆头尖尾翼型类别函数取 $N1 = 0.5$，$N2 = 1.0$；双圆弧翼型，则 $N1 = 1.0$，$N2 = 1.0$；$N1 = 0.75$，$N2 = 0.75$ 时，类别函数曲线就定义了一个 Sears-Haack 旋成体，如图 1 所示。

收稿日期：2011-05-21
作者简介：关晓辉（1987—），西北工业大学博士研究生，主要从事飞行器总体设计的研究。

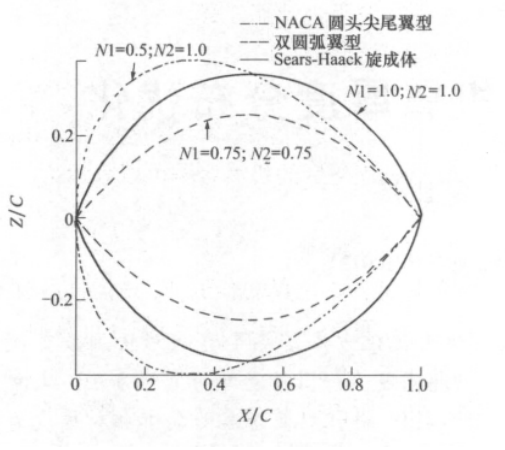

图1 不同类别函数代表的几何外形

CST参数化方法的形状函数 $S(\psi)$ 可以使用多种方法进行定义[1]。通常用 ni 阶 Bernstein 多项式的加权和作为 $S(\psi)$ 的表达式，如(4)式所示

$$\left.\begin{aligned} S(\psi) &= \sum_{i=0}^{ni} b_i B_{ni}^i(\psi) = \sum_{i=0}^{ni} b_i \left[K_{ni}^i \psi^i (1-\psi)^{ni-i}\right] \\ K_{ni}^i &= \frac{ni!}{i!(ni-i)!} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中 $b_i, i = 0,1,\cdots,ni$ 是引进的权重因子，组成几何外形的 $ni+1$ 阶参数向量 $\boldsymbol{b}$，当 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{I}$ 时，由 Bernstein 多项式的性质可以得到 $S(\psi) = 1$，称为单位形状函数，相应的翼型为单位翼型(Unit Airfoil)，即类别函数表示的基本翼型。

研究表明，以 Bernstein 多项式作为 CST 参数化方法的形状函数时，6到9阶的多项式就可以在几何形状、斜率、二阶导数、压强和气动力分布等方面对翼型进行十分精确的表示。对于一般的设计优化过程来说，4到6阶的 Bernstein 多项式的表示精度就已经可以满足要求[2-4]。使用太高阶的 Bernstein 多项式可能导致参数化过程趋于病态[5]。

1.2 机翼的 CST 参数化分解

不计机翼的扭转时，任意后缘闭合的对称翼型的上表面形状函数可以用公式(4)进行参数化表示。在不同的展向位置上应用 Bernstein 多项式加权和的形状函数描述不同的翼型，就可以确定一个解析形状函数面，从而确定整个机翼。把公式(4)中的设计参数 b_i 沿着展向使用 nj 阶 Bernstein 多项式加权和进行表示

$$b_i = \sum_{j=0}^{nj} b_{i,j} B_{nj}^j(\eta) \tag{5}$$

式中，$\eta = 2y/b$，b 为机翼翼展

$$B_{nj}^j(\eta) = K_{nj}^j \eta^j (1-\eta)^{nj-j}, j = 0,1,2,\cdots,nj$$

$$K_{nj}^j = \frac{nj!}{j!(nj-j)!}$$

这样，对称机翼的机翼表面可以表示为

$$\zeta(\psi,\eta) = \sum_{i=0}^{ni}\sum_{j=0}^{nj} b_{i,j} C_{N2}^{N1}(\psi) B_{ni}^i(\psi) B_{nj}^j(\eta) \tag{6}$$

令 $\zeta_{i,j}(\psi,\eta) = C_{N2}^{N1} B_{ni}^i(\psi) B_{nj}^j(\eta)$ 表示由弦向第 i 个 Bernstein 多项式和展向第 j 个 Bernstein 多项式所确定的分机翼表面，$b_{i,j}$ 为各个分机翼的权重值。所以整块对称机翼可以使用 $nt = (ni+1)\cdot(nj+1)$ 个分机翼的加权和表示出来。

$$\zeta(\psi,\eta) = \sum_{i=0}^{ni}\sum_{j=0}^{nj} b_{i,j}\zeta_{i,j}(\psi,\eta) = \sum_{t=1}^{nt} b_t \zeta_t(\psi,\eta) \tag{7}$$

公式(7)中的单下标 t 与双下标 (i,j) 的转换关系可以由下式确定

$$t = j\cdot(nj+1) + (i+1) \tag{8}$$

如图2所示，弦向和展向都使用3阶 Bernstein 多项式对机翼进行 CST 参数化，可以将机翼分解为16个分机翼的加权和的形式，调整分机翼的权重 b_t，就可以得到不同厚度分布的机翼。

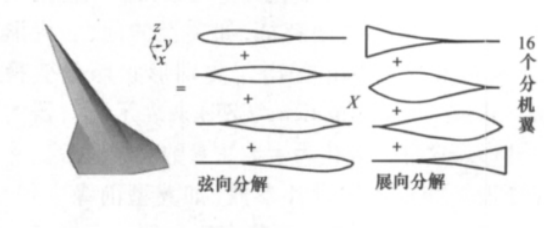

图2 机翼的 CST 参数化分解

2 超声速机翼厚度分布优化

在以激波阻力最小为目标的超声速机翼厚度分布优化过程中，用超声速面积率对机翼的激波阻力进行计算[6,7]。优化方法则采用基于 CST 参数化方法的远场组元(Far-field Composite Element，FCE)激波阻力优化法[8]。

2.1 超声速机翼厚度分布优化的算法

2.1.1 基于 CST 参数化分解的超声速面积率

超声速面积律的表达式为

$$C_{DW} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_{DW}(\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{9}$$

式中

$$C_{DW}(\theta) = \frac{-1}{2\pi S_{\text{ref}}} \cdot \int_0^l \int_0^l A''(x_1,\theta)\, A''(x_2,\theta) \ln|x_1 - x_2|\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

$C_{DW}(\theta)$ 是子午角为 θ 时计算得到当量旋成体的零升激波阻力系数。S_{ref} 为参考面积，$A(x,\theta)$ 为站位 x 处，子午角为 θ 的马赫斜面所切割的飞机截面在垂直于 x 轴方向上的投影面积，$A''(x,\theta)$ 是 $A(x,\theta)$ 的二阶导数。由公式(9) 可以看出，超声速时飞机的零升激波阻力与该马赫数下所有子午角 θ 方向的当量旋成体零升波阻的平均值相等。

由于机翼是由 nt 个分机翼的加权和表示的，所以切面积可以表示成分机翼切面积加权和的形式

$$A(x,\theta) = \sum_{t=1}^{nt} b_t A_t(x,\theta) \tag{10}$$

公式(10) 带入 $C_{DW}(\theta)$ 的计算公式得到

$$C_{DW}(\theta) = \frac{-1}{2\pi S_{\text{ref}}} \int_0^l \int_0^l \sum_{s=1}^{nt} b_s A_s''(x_1,\theta) \cdot \sum_{t=1}^{nt} b_t A_t''(x_2,\theta) \ln|x_1 - x_2|\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

积分号与累加符号交换位置，上式的值不变。

$$C_{DW}(\theta) = \frac{-1}{2\pi S_{\text{ref}}} \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} \int_0^l \int_0^l \cdot b_s A_s''(x_1,\theta)\, b_t A_t''(x_2,\theta) \ln|x_1 - x_2|\, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2$$

权重值 b_t 和 b_s 写在积分号外，子午角 θ 下机翼的激波阻力可以表示成各个分机翼激波阻力的加权和

$$C_{DW}(\theta) = \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} b_s b_t C_{DWst}(\theta) \tag{11}$$

公式(11) 中，当 $s = t$ 时，$C_{DWst}(\theta)$ 是第 t 个分机翼的在子午角 θ 下的激波阻力系数; 当 s 和 t 不相等时，$C_{DWst}(\theta) + C_{DWts}(\theta)$ 是第 s 个分机翼与第 t 个分机翼之间的干扰激波阻力系数。

公式(11) 对任意子午角都成立，带入公式(9) 得

$$C_{DW} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} b_s b_t C_{DWst}(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} b_s b_t \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{DWst}(\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

令 $C_{DWst} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{DWst}(\theta)\, \mathrm{d}\theta$，则整块机翼的激波阻力系数公式可以改写为

$$C_{DW} = \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} b_s b_t C_{DWst} \tag{12}$$

公式(12) 即为基于机翼 CST 参数化分解的机翼超声速激波阻力计算公式。

2.1.2　机翼容积约束

在公式(7) 中，机翼平面形状不改变的情况下，优化后的第 t 个分机翼的厚度及相应的容积随 b_t 成线性变化。优化后的机翼容积可以表示为

$$V_{\text{scaled}} = V_{\text{base}} V_R = \sum_{t=1}^{nt} b_t V_t \tag{13}$$

V_{base} 是初始机翼的容积，V_R 是优化后机翼与初始机翼的容积比，V_t 为第 t 个初始分机翼的容积。

为处理体积约束比较方便，引入初始分机翼在初始机翼中所占的容积分数 v_t，定义为

$$v_t = \frac{V_t}{V_{\text{base}}} \tag{14}$$

公式(14) 带入公式(13) 可以得到

$$V_R = \sum_{t=1}^{nt} \frac{b_t V_t}{V_{\text{base}}} = \sum_{t=1}^{nt} b_t v_t \tag{15}$$

引入 D_{st} 和 k_t，其值为

$$D_{st} = \frac{C_{DWst}}{v_s v_t} \tag{16}$$

$$k_t = b_t v_t \tag{17}$$

(17) 式带入(15) 式可以得到

$$V_R = \sum_{t=1}^{nt} k_t \tag{18}$$

(16) 式和(17) 式带入激波阻力系数公式(12) 可以得到

$$C_{DW} = \sum_{s=1}^{nt} \sum_{t=1}^{nt} k_s \cdot k_t \cdot D_{st} \tag{19}$$

这样，以激波阻力最小为目标的超声速机翼厚度分布优化问题定义为求解未知量 k_t，使得其值满足容积约束(18) 式的情况下，(19) 式的取值最小。

2.1.3　机翼局部厚度约束

仅仅以机翼容积为约束进行激波阻力优化时，机翼的一些区域可能会出现厚度很薄，甚至负厚度的情况。因此为了防止负厚度的出现，有必要在机翼的局部预期出现负厚度的地方(如翼尖) 添加适当的厚度约束。

为了添加局部厚度约束，引入在某展向位置 η_C 处，在需添加厚度约束的局部一段翼弦长度 $\Delta x/c$ 的范围内的平均相对厚度。

计算平均厚度的弦向范围定义为

$$\Delta\psi_C = \psi_{\text{aft}} - \psi_{\text{fwd}};\ 0 \leqslant \psi_{\text{fwd}} < \psi_{\text{aft}} \leqslant 1$$

第 i 个对称分翼型在弦向 ψ_{fwd} 到 ψ_{aft} 范围内的平均相对厚度为

$$thick_i/c = \frac{\int_{\psi_{\text{fwd}}}^{\psi_{\text{aft}}} 2\zeta_i(\psi)\,\mathrm{d}\psi}{\psi_{\text{aft}} - \psi_{\text{fwd}}} \tag{20}$$

记 $\tau_{i,j}$ 为分机翼(i,j)在展向位置 η_C 处局部平均相对厚度

$$\tau_{i,j}(\eta_C) = thick_i/c \cdot B_{nj}^{j}(\eta_C) \tag{21}$$

式中，双下标变量 $\tau_{i,j}$ 也可以使用公式(8)所示的方法进行变换，成为单下标变量 τ_t。

整块机翼的相对厚度约束公式就可以表示成

$$\tau_{\text{scaled}} = \sum_{t=1}^{nt} b_t \cdot \tau_t \tag{22}$$

式中，τ_{scaled} 是整块机翼在约束展向位置 η_C 处，弦向位置 $\Delta\psi_C = \psi_{\text{aft}} - \psi_{\text{fwd}}$ 范围内的预期的平均相对厚度。使用每个初始分机翼的容积分数对厚度约束进行处理

$$\tau_{\text{scaled}} = \sum_{t=1}^{nt} (b_t v_t)\,\frac{\tau_t}{v_t} \tag{23}$$

式中，记 $\tau con_t = \dfrac{\tau_t}{v_t}$，平均厚度约束公式(23)可以表示成

$$\tau_{\text{scaled}} = \sum_{t=1}^{nt} k_t \tau con_t \tag{24}$$

(24)式为机翼优化中，要满足的相对厚度约束。

2.1.4 添加容积和厚度约束的机翼厚度分布优化

容积约束(18)式可以写成线性约束方程

$$\Phi_V = V_R - \sum_{t=1}^{nt} k_t = 0 \tag{25}$$

局部厚度约束式(24)可以写成线性约束方程

$$\Phi_T = \tau_{\text{scaled}} - \sum_{t=1}^{nt} k_t \tau con_t = 0 \tag{26}$$

引入拉格朗日乘子 λ_V 和 λ_T，优化问题的目标函数(19)式可以写成

$$F = C_{DW} - \lambda_V \Phi_V - \lambda_T \Phi_T \tag{27}$$

满足约束条件(25)式和(26)式的优化设计参数可以通过求解由公式(27)导出的如下线性系统得到

$$\frac{\partial F}{\partial k_t} = 0, t = 1,2,3,\cdots,nt$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_V} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda_T} = 0 \tag{28}$$

需要指出的是，超声速机翼厚度分布优化过程中，可以在多个不同的位置添加相对厚度约束，这样与相对厚度相关的约束方程也将有多个。求解公式(28)代表的线性系统，就可得到 $k_t, t = 1,2,\cdots,nt$。分机翼的权重系数 b_t 可以根据 k_t 的定义(17)式得到

$$b_t = \frac{k_t}{v_t} = k_t \frac{V_{\text{base}}}{V_t} \tag{29}$$

从而优化后的机翼厚度分布与相应的激波阻力系数可以由(7)式和(12)式得到。

3 超声速机翼厚度分布优化结果

本文使用的机翼模型平面形状如图3所示，采用双后掠机翼，这是目前认为超声速客机比较可能采用的机翼平面构型。初始翼型采用类别函数 $C_{1.0}^{1.0} = \psi^{1.0} \cdot (1-\psi)^{1.0}$ 所表示的双圆弧对称翼型，相对厚度设定为5%。取优化后机翼与初始机翼的容积比约束为 $V_R = 1.0$；机翼外侧 $\eta = 0.8$ 处施加相对厚度不低于2%的约束；翼尖 $\eta = 0.95$ 处施加相对厚度不低于1%的约束。

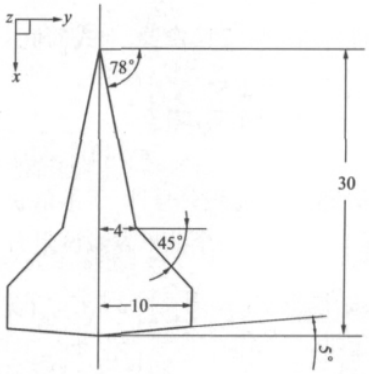

图3 机翼模型平面形状

在 $Ma = 2.0$ 的状态下，用不同的 Bernstein 多项式阶数(Bernstein Polynomial Order，BPO)进行机翼参数化，分别使用 $ni = 2, nj = 2$；$ni = 3, nj = 3$；$ni = 4, nj = 4$；$ni = 5, nj = 5$ 进行机翼的优化。优化得到的激波阻力系数对比如表1所示：

表1 优化结果

模型类型	ni	nj	C_{DW}
初始机翼	0	0	0.004 74
BPO2 分解	2	2	0.002 50
BPO3 分解	3	3	0.002 17
BPO4 分解	4	4	0.001 98
BPO5 分解	5	5	0.001 83

从表 1 的结果可以看出，使用更高阶的 Bernstein 多项式进行机翼参数化，有利于优化后的激波阻力系数降低。5 阶 Bernstein 多项式的优化结果可以使机翼的激波阻力系数降低达 61%。但把 3 阶、4 阶、5 阶 Bernstein 多项式优化结果相对比，激波阻力系数降低量逐渐变小，优化的效果越来越不明显，4 阶、5 阶多项式的优化结果只有 0.000 15 的差别。可以预见，若继续使用更高阶的多项式，优化参数继续增加，而优化效果的改进量将变得更小。

在弦向和展向都采用 5 阶 Bernstein 多项式进行机翼参数化时，优化机翼与初始机翼在不同子午角 θ 下的激波阻力系数分布如图 4 所示。

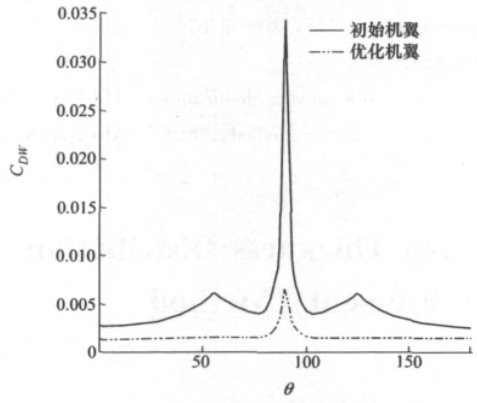

图 4　优化机翼与初始机翼激波阻力系数分布对比

使用 $ni=5$，$nj=5$ 的 Bernstein 多项式进行优化后，优化机翼和初始机翼在各个展向位置的翼型对比如图 5 所示。从图中可以看出，在内翼 $(0<\eta<0.4)$ 部分后掠角 78°，马赫数 2.0 的情况下是亚声速前缘。优化后的翼型的厚度增加，最大厚度位置提前，翼型靠近后缘位置的厚度也加厚，以补偿外翼变薄后机翼减少的容积。机翼的亚声速前缘加厚并不会产生较大的激波阻力。外翼 $(0.4<\eta<1.0)$ 后掠角为 45°，属于超声速前缘。优化后的外翼翼型比原机翼翼型更薄，并且越靠近机翼外侧，翼型越薄。这是因为在超声速条件下，薄翼型可以产生较小的激波阻力。事实上，在不添加厚度约束的情况下，由于原机翼外翼将会产生较大的激波阻力，优化后的外翼会出现负厚度。

经过以上初步设计的超声速机翼如图 6 所示，其在 $Ma=2.0$ 状态下的超声速激波阻力已经显著降低。这样优化设计后的机翼模型可以作为更详细设计过程的初始模型，进入进一步的优化迭代过程，从而得到性能更加优良的结果。

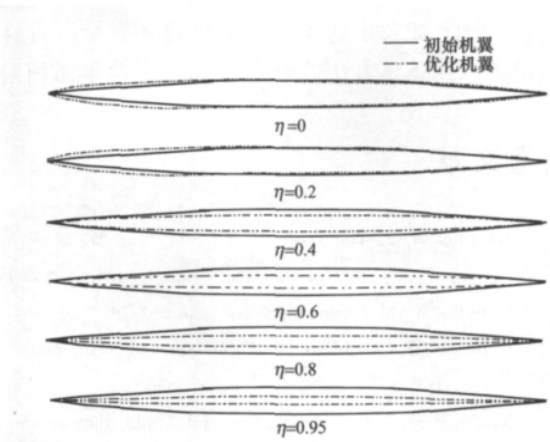

图 5　优化机翼与初始机翼的翼型对比

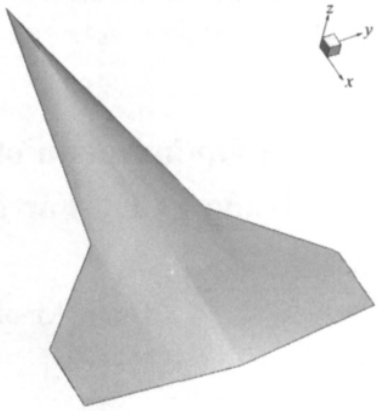

图 6　优化后的机翼三维模型

4　结　论

1) 在飞行器初始概念设计阶段，结合 CST 参数化方法，对机翼使用 FCE 激波阻力优化方法进行快速优化，可以在很大程度上降低机翼的超声速激波阻力。

2) 使用基于 CST 参数化方法的 FCE 激波阻力优化法进行机翼的超声速激波阻力优化过程中，表示形状函数时，4 到 5 阶的 Bernstein 多项式就可以达到要求。过高阶的多项式不仅可能带来病态问题，增加设计参数与计算量，而且不会使优化结果有大幅改善。

从 FCE 优化方法的计算过程可以看出，该方法的应用并不仅仅局限于机翼厚度分布的优化计算。任何可以用超声速面积率来计算超声速激波阻力的

细长体外形，如超声速飞行器的机身和翼身组合体等，都可以使用该方法进行修形，以达到降低激波阻力的目的。使用FCE方法对机身和翼身组合体进行激波阻力优化的方法，还有待进一步研究。

参考文献：

[1] Straathof M H, Van Tooren M J L, Voskuijl M, et al. Aerodynamic Shape Parameterisation and Optimisation of Novel Configurations. Proceedings of the RAeS Aerodynamic Shape Parameterisation and Optimisation of Novel Configurations Conference. London: Royal Aeronautical Soc, 2008: 1-14

[2] Kulfan B M, Bussoletti J E. "Fundamental" Parametric Geometry Representations for Aircraft Component Shapes. AIAA-2006-6948, 2006

[3] Kulfan B M. Recent Extensions and Applications of the "CST" Universal Parametric Geometry Representation Method. AIAA-2007-7709

[4] Kulfan B M. A Universal Parametric Geometry Representation Method—— "CST". AIAA-2007-62

[5] Ceze M, Hayashi M, Volpe E. A Study of the CST Parameterization Characteristics. AIAA-2009-3767

[6] Jones R T. Theory of Wing-Body Drag at Supersonic Speeds. NACA-RM-A53H18A, 1953

[7] Nikolic V, Jumper E J. Zero-Lift Wave Drag Calculation Using Supersonic Area Rule and Its Modifications. AIAA-2004-217

[8] Kulfan B M. New Supersonic Wing Far-Field Composite-Element Wave-Drag Optimization Method, "FCE". AIAA-2008-132

Exploring Optimization of Supersonic Wing Thickness Distribution Using FCE (Far-field Composite Element) Method

Guan Xiaohui, Li Zhanke, Song Bifeng

(College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Developed from the class shape transformation (CST) geometric parameterization method, the FCE wave drag optimization method is a new aerodynamic shape optimization method for supersonic aircraft. We use the CST parameterization method to perform the shape parameterization of a typical and large swept wing model of a supersonic aircraft. Sections 1 and 2 of the full paper explain our exploration, whose core consists of: (1) under the constraints of the total volume and local thicknesses of the swept wing, we carry out the quick optimization of the wing thickness distribution, aiming to achieve minimum wave drag; (2) we use the supersonic area rule to calculate the wave drag and to optimize the shape parameters of the swept wing with the Lagrange multiplier method, thus requiring no iteration and reducing computation complexity. The optimization results, given in Table 1 and Figs. 4, 5 and 6, and their analysis show preliminarily that, compared with the baseline wing model, our optimization method can reduce the wave drag coefficient by 61%, thus being a useful method for aerodynamic shape optimization so as to reduce the wave drag at the stage of the conceptual design of a supersonic aircraft.

Key words: algorithms, calculations, computational complexity, computational geometry, conceptual design, constrained optimization, drag coefficient, drag reduction, Lagrange multipliers, models, parameterization, shape optimization, shock waves, supersonic aerodynamics, supersonic aircraft, swept wings, thickness control, three dimensional, transport aircraft; Far-field Composite Element (FCE), Class Shape Transformation (CST), wave drag