https://doi.org/10.1051/jnwpu/20234120439

NM 理论中积分真度的统一理论

王波, 惠小静, 鲁星

(延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000)

摘 要:基于在幂零极小逻辑 NM(nilpotent minimun)命题逻辑系统中,通过将公式诱导的函数进行积分的方法提出了公式的积分真度概念,利用积分不变性证明了积分真度 MP 规则、HS 规则;在 NM 命题逻辑系统的全体公式之集上引入了积分相似度和积分伪距离,并且证明了关于相似度和伪距离的一些性质;通过发散度以及直径的概念,提出了 NM 命题模糊逻辑中反映理论相容程度新的隶属函数,利用隶属函数给出了相容度的概念,证明了不相容理论的相容度为 0,完全相容理论的相容度为 1。

关 键 词:NM 命题逻辑系统;积分真度;伪距离;相容度

中图分类号:O141.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-2758(2023)02-0439-07

数理逻辑的特点在于形式化而不是数值计算,为了反映程度化的思想,20 世纪 50 年代初,Rosser 教授利用“指派真值”来刻画逻辑公式和反映逻辑推理的真实程度[1],这种思想在 Pavelka 的系列文章[2]中得到了全面发展。后来有许多学者从不同角度提出了逻辑公式的程度化思想。

21 世纪初,王国俊教授在经典二值命题逻辑中引入了命题的真度概念[3],提出了计量逻辑学理论,建立了一套近似推理模式之后,国内外学者展开了广泛的研究,得到了一些重要结果[4-6]。但是以上所有结果都建立在均匀概率测度空间上。为此,文献[7]利用赋值空间上的 Borel 概率测度在二值命题中引入了公式的概率真度概念。文献[8]在 Łukasiewicz 模糊逻辑系统 Łuk、Gödel 模糊逻辑系统 Göd、Product 模糊逻辑系统 Π 和 R_0 模糊逻辑系统 R_0^* 这 4 种模糊命题逻辑系统中提出了公式的积分真度概念。文献[9]在一类命题逻辑系统中借助文献[7]的思想提出了利用积分定义公式真度的统一方法。文献[10-11]在 SMTL 命题逻辑系统中提出了公式的积分真度理论。

本文将文献[8]的思想和方法应用于 NM 命题逻辑系统中建立了公式积分真度的统一理论。首先,验证了积分真度 MP 规则、HS 规则;其次,引入了积分相似度和积分伪距离;最后,引进了隶属函数和相容度的概念。值得注意的是,首先,文献[8]的结果可纳入到本文更广泛的统一框架下;其次,在 NM 系统中,文献[9]关于建立积分真度和相似度提出的假设条件全部成立;最后,本文的结果是对文献[10-11]的进一步推广,更加丰富了左连续三角模的模糊逻辑系统计量化研究。

1 预备知识

假设 $\boldsymbol{S}=\{p_1,p_2,\cdots\}$ 是可数集,ψ 是 $\boldsymbol{S}$ 生成的自由代数,其中分别为 $\neg$, $\vee$, $\rightarrow$ 一元算子和二元算子。不同的蕴含算子和赋值格决定了不同的逻辑系统,下面介绍幂零极小逻辑 NM 的蕴含算子和相应的 t- 范数定义[12]

$$x\otimes_n y=\begin{cases}0, & x\leqslant n(y)\\ \min(x,y), & x>n(y)\end{cases} \tag{1}$$

$$R_{\mathrm{NM}}(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y\\ \max(n(x),y), & x>y\end{cases} \tag{2}$$

注 1 把标准的 NM 代数称为[0,1]中的 NM

收稿日期:2022-06-30 **基金项目**:国家自然科学基金(12261090)资助

作者简介:王波(1997—),延安大学硕士研究生,主要从事数理逻辑与不确定性推理研究。

通信作者:惠小静(1972—),延安大学教授,主要从事数理逻辑与不确定性推理研究。e-mail:xhmxiaojing@163.com

代数,通常取 $n(x) = 1 - x$。

定义[0,1] 上的二元算子 & 和 $\rightarrow$ 如下

$$x \,\&\, y = x \otimes_n y, x \rightarrow y = R_{\mathrm{NM}}(x,y) \tag{3}$$

注 2 从 ψ 到 R 区间[0,1] 的($\neg$, $\vee$, $\rightarrow$) 型同态 $v:\psi \rightarrow [0,1]$ 称为 ψ 的 R- 赋值。

定义 1 幂零极小逻辑 NM 系统由以下 12 个公理模式和推理规则 MP 组成[13]

(NM1) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(NM2) $A \,\&\, B \rightarrow A$

(NM3) $A \,\&\, B \rightarrow B \,\&\, A$

(NM4) $A \wedge B \rightarrow A$

(NM5) $A \wedge B \rightarrow B \wedge A$

(NM6) $A \,\&\, (A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge B)$

(NM7) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \,\&\, B \rightarrow C)$

(NM8) $(A \,\&\, B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$

(NM9) $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (((B \rightarrow A) \rightarrow C) \rightarrow C)$

(NM10) $0 \rightarrow A$

(NM11) $((A \,\&\, B) \rightarrow 0) \vee ((A \wedge B) \rightarrow (A \,\&\, B))$

(NM12) $\neg \neg A \rightarrow A$

MP 规则 由 $A, A \rightarrow B$ 推出 B。

定义 2 设 $A = A(p_1, \cdots, p_n)$ 是 ψ 中含有 n 个原子公式 $p_1, \cdots, p_n$ 的公式,在 A 中把 p_i 换成 x_i 并保持 $\neg$, $\vee$ 与 $\rightarrow$ 不变,但把它们理解为 R 单位区间上相应的运算,则得一 n 元函数:$\bar{A}(x_1, \cdots, x_n) : \boldsymbol{I}^n \rightarrow \boldsymbol{I}$,称 $\bar{A}$ 是由公式 A 所诱导的函数[14]。

定义 3 自然数列 $u_1, u_2, \cdots$ 叫斐波那契数列,若 $u_1 = u_2 = 1$,且 $u_n + u_{n+1} = u_{n+2} (n = 1,2,\cdots)$[13]。

定义 4 设 $\otimes$ 是[0,1] 上的左连续三角模,在[0,1] 上定义二元运算 $\rightarrow$ 如下[15]

$$b \rightarrow c = \vee \{x \mid x \otimes b \leqslant c\} \quad x,b,c \in [0,1]$$

则

1) $\rightarrow$ 是 $\otimes$ 与相伴随的蕴含算子,即 $a \otimes b \leqslant c$ 当且仅当 $a \leqslant b \rightarrow c$。

2) $b \rightarrow c = 1$ 当且仅当 $b \leqslant c$。

3) $a \leqslant b \rightarrow c$ 当且仅当 $b \leqslant a \rightarrow c$。

4) $a \rightarrow (b \rightarrow c) = b \rightarrow (a \rightarrow c)$。

5) $1 \rightarrow c = c$。

6) $b \rightarrow \underset{i \in I}{\wedge} c_i = \underset{i \in I}{\wedge} (b \rightarrow c_i)$, $(\underset{i \in I}{\vee} b_i) \rightarrow c = \underset{i \in I}{\wedge} (b_i \rightarrow c)$。

7) $b \rightarrow c$ 关于 c 单调递增,关于 b 单调递减。

定义 5 设 $A = A(p_1, \cdots, p_n) \in \psi$,若 $\bar{A}(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $\boldsymbol{I}^n$ 上几乎处处等于 1, 则称 A 为几乎重言式[11]。

定义 6 设 $A = A(p_1, \cdots, p_n)$, $B = B(p_1, \cdots, p_n)$, 若 $\bar{A}(x_i, \cdots, x_n) = \bar{B}(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $\boldsymbol{I}^n$ 中几乎处处成立,则称 A 与 B 几乎逻辑等价[11]。

2 NM 理论中的积分真度

定义 7 令 $A(p_1, \cdots, p_m)$ 为 ψ 中的公式,$\bar{A}$ 是相应 A 的 R 函数,那么积分

$$\tau_{\mathrm{NM}}(A) = (R)\int_{\Delta} \bar{A} \mathrm{d}w \tag{4}$$

被称为 A 的 R- 真度。

定理 1 设 $A \in \psi$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 1$ 当且仅当 A 是 R_{NM}- 几乎重言式。

证明 若 A 是 R_{NM}- 几乎重言式,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 1$, 反过来,设 $A = A(p_1, \cdots, p_n) \in \psi$ 且 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 1$,则

$$\int_{\Delta_n} \bar{A}(x_1, \cdots, x_n) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n = 1$$

所以 $\bar{A}(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $\boldsymbol{I}^n$ 几乎处处等于 1,因此 A 是 R_{NM}- 几乎重言式。

命题 1 设 $A \in \psi$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(\neg A) = 1 - \tau_{\mathrm{NM}}(A)$。

推论 1 设 $A \in \psi$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 0$ 当且仅当 A 是 R_{NM}- 几乎矛盾式。

引理 1 设 $f(x,y) = R_{\mathrm{NM}}(x,y)$,则 $f(a,c) + 1 \geqslant f(a,b) + f(b,c)$。

证明 设 $a \leqslant c$,则 $f(a,c) = 1$。

1) 设 $b < a$,并且 $1 - a > b$ 时,$f(a,b) = 1 - a$, $f(b,c) = 1$,所以

$$f(a,c) + 1 \geqslant f(a,b) + f(b,c)$$

设 $b < a$,并且 $1 - a \leqslant b$ 时,$f(a,b) = b$, $f(b,c) = 1$,所以

$$f(a,c) + 1 \geqslant f(a,b) + f(b,c)$$

2) 设 $a \leqslant b \leqslant c$,类似 1) 的证明。

3) 设 $c < b$,类似 1) 的证明。

当 $a > c$ 时,类似可证 $f(a,c) + 1 \geqslant f(a,b) + f(b,c)$ 成立。

综上所述,设 $f(x,y) = R_{\mathrm{NM}}(x,y)$ 时,$f(a,c) + 1 \geqslant f(a,b) + f(b,c)$ 成立。

定理 2 设 $\rightarrow : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 是二元函数,$a, b, c \in [0,1]$,$\boldsymbol{I}$ 为指标集,则

$$c \geqslant b + b \rightarrow c - 1$$

证明 由引理 1 可得,$R_{\mathrm{NM}}(a,c) + 1 \geqslant R_{\mathrm{NM}}(a,b) + R_{\mathrm{NM}}(b,c)$,所以 $a \rightarrow c + 1 \geqslant a \rightarrow b + b \rightarrow c$,令

$a=1$,则 $1\to c+1\geqslant 1\to b+b\to c$,由定义 4 的第 5)条得,$c+1\geqslant b+b\to c$,即 $c\geqslant b+b\to c-1$。

定理 3(积分 MP 规则) 设 $A,B\in\psi$,若 $\tau_{\mathrm{NM}}(A)\geqslant\alpha,\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)\geqslant\beta$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(B)\geqslant\alpha+\beta-1$。

证明　由积分不变性定理,不妨设 A 与 B 含有同样的原子公式 $p_1,\cdots,p_n$。由定理 2 得,$c\geqslant b+b\to c-1$,所以 $\bar{B}\geqslant\bar{A}+\bar{A}\to\bar{B}-1$,从而

$$\tau_{\mathrm{NM}}(B)=\int_{\Delta}\bar{B}\mathrm{d}w\geqslant\int_{\Delta}(\bar{A}+\bar{A}\to\bar{B}-1)\mathrm{d}w=$$

$$\int_{\Delta}\bar{A}\mathrm{d}w+\int_{\Delta}(\bar{A}\to\bar{B})\mathrm{d}w-1=$$

$$\tau_{\mathrm{NM}}(A)+\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)-1\geqslant\alpha+\beta-1$$

推论 2　设 $A,B\in\psi$,若 $\tau_{\mathrm{NM}}(A)=1,\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)=1$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(B)=1$。

定理 4(积分 HS 规则) 设 $A,B,C\in\psi$,若 $\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)\geqslant\alpha,\tau_{\mathrm{NM}}(B\to C)\geqslant\beta$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$。

证明　因为 $(B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C))$ 是重言式[13],所以由定理 1 得,$\tau_{\mathrm{NM}}((B\to C)\to((A\to B)\to(A\to C)))=1$。因为 $\tau_{\mathrm{NM}}(B\to C)\geqslant\beta$,所以由定理 3 得,$\tau_{\mathrm{NM}}((A\to B)\to(A\to C))\geqslant 1+\beta-1=\beta$,又因为 $\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)\geqslant\alpha$,所以再由定理 3 得,$\tau_{\mathrm{NM}}(A\to C)\geqslant\alpha+\beta-1$。

推论 3　设 $A,B,C\in\psi$,若 $\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)=1,\tau_{\mathrm{NM}}(B\to C)=1$,则 $\tau_{\mathrm{NM}}(A\to C)=1$。

命题 2　假设 $I_n=p_1\wedge\cdots\wedge p_n,U_n=p_1\vee\cdots\vee p_n$,是 $\boldsymbol{S}$ 中不同的原子公式,那么

$$\tau_{\mathrm{NM}}(I_n)=\frac{1}{n+1},\quad\tau_{\mathrm{NM}}(U_n)=\frac{n}{n+1}\tag{5}$$

例 1　计算 $\tau_{\mathrm{NM}}(p\to q)$ 和 $\tau_{\mathrm{NM}}(p\to\neg p\vee q)$ 的值。

解　$\Delta_1=\{(x,y)\mid x\leqslant y\}$,

$\Delta_2=\{(x,y)\mid 1-x>y\}$,

$\Delta_3=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\}$,

$$\tau_{\mathrm{NM}}(p\to q)=\int_{\Delta_1}\mathrm{d}w_2+\int_{\Delta_2}(1-x)\mathrm{d}w_2+\int_{\Delta_3}y\mathrm{d}w_2=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{1-y}(1-x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^x y\mathrm{d}y=\frac{3}{4}$$

$$\tau_{\mathrm{NM}}(p\to\neg p\vee q)=\int_{\Delta_n}(x\to(1-x\vee y))\mathrm{d}w_2=$$

$$\int_{\Delta_2}(x\to(1-x))\mathrm{d}w_2+\int_{\Delta_3}(x\to y)\mathrm{d}w_2=\frac{3}{4}$$

3　NM 理论中的积分相似度

定义 8　设 $A,B\in\psi$,则称

$$\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=\int_{\Delta}R(\bar{A},\bar{B})\wedge R(\bar{B},\bar{A})\mathrm{d}w\tag{6}$$

为 A 与 B 之间的 R 积分相似度。

命题 3　设 $A,B\in\psi$,则

1) $\xi_{\mathrm{NM}}(A,A)=1$。

2) 当 $\bar{A}\leqslant\bar{B}$ 时,$\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=\tau_{\mathrm{NM}}(B\to A)$;当 $\bar{A}>\bar{B}$ 时,$\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=\tau_{\mathrm{NM}}(A\to B)$。

3) $\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=\xi_{\mathrm{NM}}(B,A)$。

定理 5　设 $A,B\in\psi$,则 $\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=1$,当且仅当 A 与 B 几乎逻辑等价。

证明　当 $\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=1$ 时,由定义 6 和定义 8 知,$R(\bar{A},\bar{B})=R(\bar{B},\bar{A})=1$ 在 $\boldsymbol{I}^n$ 几乎处处成立,因此 A 与 B 几乎逻辑等价。反过来,当 A 与 B 几乎逻辑等价时,$A\to B$ 是重言式,$B\to A$ 是重言式,因此 $(A\to B)\wedge(B\to A)$ 是重言式,所以 $\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)=1$。

引理 2　设 $f(x,y)=R_{\mathrm{NM}}(x,y)\wedge R_{\mathrm{NM}}(y,x)$,则 $f(a,c)\geqslant f(a,b)+f(b,c)-1$。

证明

1) 设 $a\leqslant c$,并且 $1-c>a$ 时,$f(a,c)=1-c$;

2) 设 $a\leqslant c$,并且 $1-c\leqslant a$ 时,$f(a,c)=a$。

先讨论第 1) 种情况

① 设 $b<a$,并且 $1-a>b$ 时,$f(a,b)=1-a$,$f(b,c)=1-c$,所以 $f(a,b)+f(b,c)=2-a-c$,因此 $f(a,c)\geqslant f(a,b)+f(b,c)-1$。

设 $b<a$,并且 $1-a\leqslant b$ 时,$f(a,b)=b$,$f(b,c)=1-c$,所以 $f(a,b)+f(b,c)=1-c+b$,因为 $b<c$,所以 $b-c<0$,因此 $f(a,c)\geqslant f(a,b)+f(b,c)-1$。

② 设 $a\leqslant b\leqslant c$,类似于 ① 的证明。

③ 设 $c<b$,类似于 ① 的证明。

④ 对于第 2) 种情况以及 $a>c$ 时,类似可证 $f(a,c)\geqslant f(a,b)+f(b,c)-1$ 成立。

综上所述,设 $f(x,y)=R_{\mathrm{NM}}(x,y)\wedge R_{\mathrm{NM}}(y,x)$ 时,$f(a,c)\geqslant f(a,b)+f(b,c)-1$ 成立。

定理 6　设 $A,B,C\in\psi$,若 $\xi_{\mathrm{NM}}(A,B)\geqslant\alpha,\xi_{\mathrm{NM}}(B,C)\geqslant\beta$,则 $\xi_{\mathrm{NM}}(A,C)\geqslant\alpha+\beta-1$。

证明　由引理 2 可得,

$$\xi_{\mathrm{NM}}(A,C)=\int_{\Delta}f(\bar{A},\bar{C})\mathrm{d}w\geqslant$$

$$\int_{\Delta}[f(\bar{A},\bar{B})+f(\bar{B},\bar{C})-1]\mathrm{d}w=$$

$$\int_{\Delta} f(\bar{A},\bar{B})\,\mathrm{d}w + \int_{\Delta} f(\bar{B},\bar{C})\,\mathrm{d}w - \int_{\Delta} 1\,\mathrm{d}w = \xi_{\mathrm{NM}}(A,B) + \xi_{\mathrm{NM}}(B,C) - 1 \geqslant \alpha + \beta - 1$$

4 NM 理论中的积分伪距离

定义 9 设 $A,B \in \psi$,规定

$$\rho_{\mathrm{NM}}(A,B) = 1 - \xi_{\mathrm{NM}}(A,B) \tag{7}$$

定理 7 $\rho_{\mathrm{NM}}:\psi \times \psi \to [0,1]$ 是 ψ 上的积分伪距离。设 $A,B,C \in \psi$,则

1) $\rho_{\mathrm{NM}}(A,A) = 0$。

2) $\rho_{\mathrm{NM}}(A,B) = \rho_{\mathrm{NM}}(B,A)$。

3) $\xi_{\mathrm{NM}}(A,C) \geqslant \xi_{\mathrm{NM}}(A,B) + \xi_{\mathrm{NM}}(B,C) - 1$。

命题 4 设 $A,B \in \psi$,当 A 为定理时,

$$\rho_{\mathrm{NM}}(A,B) = 1 - \tau_{\mathrm{NM}}(B) \tag{8}$$

5 NM 理论中的积分相容度

王国俊在 Łukasiewicz 模糊命题逻辑系统 Łuk 有限理论 Γ 的情况下给出了相容度的定义[16],周湘楠在 Łukasiewicz 模糊逻辑系统 Łuk、Gödel 模糊逻辑系统 Göd、Product 模糊逻辑系统 Π 和 R_0 模糊逻辑系统 R_0^* 无限理论 Γ 的情况下给出了相容度的定义[17],周红军对上述给出的 2 个相容度进行了补充[18]。本节将在 NM 命题模糊逻辑无限理论 Γ 的情况下给出相容度的定义。

定义 10 设 $A \in \psi,\Gamma \subseteq \psi$,从 Γ 到 A 的准推理是一个有限序列 $A_1,\cdots,A_n$,其中 $A_n = A$,且对每个 $i \leqslant n,A_i \in T \cup \Gamma$,或者有 $j,k < i$ 使 A_i 是由 A_j 与 A_k 运用 MP 规则或 HS 规则而得的结果,A 叫做 Γ 的 n 级准推论,记作 $(q)\Gamma^{(n)}$,$\vdash A_0\Gamma$ 的全体 n 级准推论之集记作 $(q)\mathrm{Ded}(\Gamma^{(n)})$,或简记作 $D(\Gamma^{(n)})$[14]。

命题 5 设 $A \in \psi,\Gamma \subseteq \psi,A \in D(\Gamma^{(n)})$,如果对每个 $B \in \Gamma$ 均有 $\tau_{\mathrm{NM}}(B) \geqslant \alpha$,则

$$\tau_{\mathrm{NM}}(A) \geqslant u_n(\alpha - 1) \tag{9}$$

式中,u_n 是斐波那契数列的第 n 项。

证明 证明过程类似文献[14]中的证明,在此不再重复。

注 3 由(9)式可以看出,当 Γ 中各公式的真度小于 1 时,则随着推演长度的增加,所得准推论的真度将减小。

定义 11 设 $\Gamma \subseteq \psi$,令 $D(\Gamma) = \{A \in \psi \mid (q)\Gamma \vdash A\}$,即 $D(\Gamma) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(\Gamma^{(n)})$[14]。

定义 12 假设 $A,B \in \psi$,那么

$$\mathrm{div}(\Gamma) = \sup\{\rho_{\mathrm{NM}}(A,B) \mid A,B \in D(\Gamma)\} \tag{10}$$

称 $\mathrm{div}(\Gamma)$ 为理论 Γ 的发散度。当 $\mathrm{div}(\Gamma) = 1$ 时称 Γ 为全发散理论。

定义 13 假设 Σ 是 ψ 中的非空子集,那么

$$d(\Sigma) = \sup\{\rho_{\mathrm{NM}}(A,B) \mid A,B \in \Sigma\} \tag{11}$$

被称为 Σ 的直径。

注 4 1) 如果 Σ 是 ψ 包含一个定理的有限子集,那么

$$d(\Sigma) = 1 - \tau_{\mathrm{NM}}(A)\ (A \text{ 是 } \Sigma \text{ 中最小真度公式}) \tag{12}$$

2) $d(\Gamma^{(n+2)}) > d(\Gamma^{(n)})$($n$ 越大,$d(\Gamma^n)$ 越大) (13)

定理 8 设 A,B 是 NM 中的公式,Γ 是 NM 中的理论,$d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) = 1(A \in D(\Gamma^{(n)}),B \in D(\Gamma^{(b)}),b$ 是常数,A 的推演长度为 n,B 的推演长度为 b) 当且仅当 A 是矛盾式 B 是重言式。

证明 假设 $d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) = 1$,根据(12)式及真度的取值范围知,$0 \leqslant d(\Gamma^{(b)}) \leqslant 1,0 \leqslant d(\Gamma^{(n)}) \leqslant 1$。当 $d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) = 1$ 时,只有当 $d(\Gamma^{(n)}) = 1,d(\Gamma^{(b)}) = 0$ 时等式成立,所以 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 0,\tau_{\mathrm{NM}}(B) = 1$,即 A 是矛盾式 B 是重言式。

假设 A 是矛盾式 B 是重言式,所以 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 0$,$\tau_{NM}(B) = 1$,由(12)式得,$d(\Gamma^{(n)}) = 1 - \tau_{\mathrm{NM}}(A) = 1$,$d(\Gamma^{(b)}) = 1 - \tau_{\mathrm{NM}}(B) = 0$,所以 $d(\Gamma^{(b)}) - d(\Gamma^{(n)}) = 1$。

定义 14 假设 A,B 是 NM 中的公式,Γ 是 NM 中的理论,定义

$$i(\Gamma) = 1 - \frac{\lceil d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) \rceil}{d(\Gamma^{(b)})} \quad (A \in d(\Gamma^{(n)}),B \in d(\Gamma^{(b)})) \tag{14}$$

并且

$$\lceil d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) \rceil = \begin{cases} 1, & d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) = 1 \\ 0, & 0 \leqslant d(\Gamma^{(n)}) - d(\Gamma^{(b)}) < 1 \end{cases} \tag{15}$$

称 $i(\Gamma)$ 为 NM 中理论 Γ 的极性指标。

定义 15 假设 Γ 是 NM 中的理论,那么

$$\zeta(\Gamma) = 1 - \mathrm{div}(\Gamma)\left(1 - \frac{1}{2}(i(\Gamma))\right) \tag{16}$$

称 $\zeta(\Gamma)$ 为 NM 中理论 Γ 的相容度。($i(\Gamma)$ 是由上述定义 14 给出)。

定理 9 在 NM 中存在一系列相容理论 $\Gamma_1,\Gamma_2,$

…,Γ_k 序列,它们的发散度为 $\mathrm{div}(\Gamma_k)=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$。

证明　假设 $A_1=p_2$,$A_k=p_1\rightarrow A_{k-1}(k=2,3,\cdots)$,$p_1$,$p_2$ 是不同的原子公式,并且($v(p_1)=x_1$,$v(p_2)=x_2$),根据(2) ~ (3) 式得

$$v(A_1)=x_2 v(A_2)=\begin{cases}1, x_1\leqslant x_2\leqslant 1\\ x_2, 1-x_1<x_2<x_1\\ 1-x_1, 0\leqslant x_2\leqslant 1-x_1,(\text{规定 } x_1>x_2)\end{cases}$$

$$v(A_k)=\begin{cases}1, x_1^{k-1}\leqslant x_2\leqslant 1\\ x_2, (1-x_1)^{k-1}<x_2<x_1^{k-1}\\ 1-x_1, 0\leqslant x_2\leqslant (1-x_1)^{k-1},(\text{规定 } x_1^{k-1}>x_2)\end{cases}\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

所以

$$\bar{A}_k^n(x_1,x_2)=\begin{cases}1, x_1^{k-1}\leqslant x_2\leqslant 1\\ x_2^n, (1-x_1)^{k-1}<x_2<x_1^{k-1}\\ (1-x_1)^n, 0\leqslant x_2\leqslant (1-x_1)^{k-1},(\text{规定 } x_1^{k-1}>x_2)\end{cases}\quad(k=1,2,3,\cdots)$$

令 $\Gamma_k=\{A_k\}$,因此 $A_k^n\in D(\Gamma_k)$,下面证明 Γ_k 是相容理论,证明过程可参考文献[17]。

取 $B=p_1\rightarrow p_1\in D(\Gamma_k)$ 并且 $\bar{B}(x_1)\equiv 1$,因为 $\bar{A}_k^{n+1}=\bar{A}_k^n\otimes\bar{A}\leqslant\bar{A}_k^n$,$\rho_{\mathrm{NM}}(B,A_k^n)$ 随着 n 的增加而增加,因此 $\mathrm{div}(\Gamma_k)=\lim\limits_{n\rightarrow\infty}\rho_{\mathrm{NM}}(B,A_k^n)$。根据(8) 式得,$\rho_{\mathrm{NM}}(B,A_k^n)=1-\tau_{\mathrm{NM}}(A_k^n)$。根据(4) 式得

$$\tau_{\mathrm{NM}}(A_k^n)=\int_0^1\int_0^1\bar{A}_k^n(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=\int_0^1\Big(\int_0^{(1-x_1)^{k-1}}(1-x_1)^n\mathrm{d}x_2+\int_{(1-x_1)^{k-1}}^{x_1^{k-1}}x_2^n\mathrm{d}x_2+\int_{x_1^{k-1}}^1\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{n(k-1)+1}+\frac{1}{n+1}\frac{1}{(k-1)(n+1)+1}-\frac{1}{n+1}\frac{1}{(k-1)(n+1)+1}+1-\frac{1}{k}$$

因此

$$\rho_{\mathrm{NM}}(B,A_k^n)=1-\tau_R(A_k^n)=\frac{1}{k}-\frac{1}{n(k-1)+1}$$

所以

$$\mathrm{div}(\Gamma_k)=\lim_{n\rightarrow\infty}\rho_{R_{\mathrm{NM}}}(B,A_k^n)=\frac{1}{k}(k=1,2,\cdots)$$

定理 10　假设 Γ 是 NM 中的理论,那么

1) Γ 是相容的当且仅当 $i(\Gamma)=1$。

2) Γ 是不相容的当且仅当 $i(\Gamma)=0$。

证明　假设 Γ 是不相容的,那么 $\Gamma\vdash C$(C 是矛盾式),因此 $C\in d(\Gamma^n)\in D(\Gamma)$。因为每个理论都包含定理,所以 $A\in d(\Gamma^b)\in D(\Gamma)$($A$ 是重言式)。因此得,$d(\Gamma^{(n)})-d(\Gamma^{(b)})=1$,所以 $i(\Gamma)=0$。另一方面,假设 $i(\Gamma)=0$ 显然成立,因此(2) 式成立,(1) 式自然也成立。

定理 11　假设 Γ 是 NM 中的理论,那么

1) 如果 $i(\Gamma)=0$,则 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$,但反之不成立。

2) 如果 $\mathrm{div}(\Gamma)<1$,则 $i(\Gamma)=1$,但反之不成立。

证明　假设 $i(\Gamma)=0$,根据定理 10 得,Γ 是不相容的,根据(10) ~ (12) 式知,$\mathrm{div}(\Gamma)=\sup\{p_{NM}(A,B)\}=1$。另一方面,假设 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$,即理论 Γ 是完全发散的,但不能推出 Γ 是不相容的,即 $i(\Gamma)=0$,令 $\Gamma=S$ 是由所有原子公式构成的,见文献[18],知 $\Gamma=S$ 是完全发散并且是相容理论。根据定理 10 知,当理论 Γ 是相容时,$i(\Gamma)=1$,因此 $\mathrm{div}(\Gamma)=1$ 不能推出 $i(\Gamma)=0$。因此(1) 式成立,(2) 式自然也成立。

定理 12　假设 Γ 是 NM 中的理论,那么

1) Γ 是完全相容的,当且仅当 $\zeta(\Gamma)=1$。

2) Γ 是不相容的,当且仅当 $\zeta(\Gamma)=0$。

3) Γ 是相容的,当且仅当 $\frac{1}{2}\leqslant\zeta(\Gamma)\leqslant 1$。$\Gamma$ 是相容且全发散当且仅当 $\zeta(\Gamma)=\frac{1}{2}$。

证明

1) 假设 Γ 是完全相容的,显然成立。假设 $\zeta(\Gamma)=1$,,如果 Γ 不是完全相容的,那么 Γ 就有2种情况,第一种情况是 Γ 是相容的,那么 $\mathrm{div}(\Gamma)\neq 0$,由定理10的第1) 条知,$i(\Gamma)=1$,所以由(16) 式知,$\zeta(\Gamma)<1$,另一种情况类似可证明成立。

2) 假设 Γ 是不相容的,显然成立。假设 $\zeta(\Gamma)=0$,则由(16) 式和 $\mathrm{div}(\Gamma)\leqslant 1$ 知,$i(\Gamma)\leqslant 0$,因为 $i(\Gamma)\in\{0,1\}$,因此 $i(\Gamma)=0$,由定理10的第2) 条知,Γ 是不相容的,因此(2) 式成立。

3) 假设 Γ 是相容的,那么 $\mathrm{div}(\Gamma)\neq 0$,由定理

10 的第 1) 条及 (16) 式知,$\zeta(\Gamma) = 1 - \frac{1}{2}\mathrm{div}(\Gamma)\zeta(\Gamma) \geqslant \frac{1}{2}$,又因为 $\zeta(\Gamma) \in [0,1]$,因此 $\frac{1}{2} \leqslant \zeta(\Gamma) \leqslant 1$。假设 $\frac{1}{2} \leqslant \zeta(\Gamma) \leqslant 1$,如果 Γ 不相容,那么 $\mathrm{div}(\Gamma) = 1$,由定理 10 的第 2) 条及 (16) 式知 $\zeta(\Gamma) = 0$,与 $\frac{1}{2} \leqslant \zeta(\Gamma) \leqslant 1$ 矛盾,所以当 $\frac{1}{2} \leqslant \zeta(\Gamma) \leqslant 1$,$\Gamma$ 是相容的。对于后半部分显然成立。

例 2 假设 Γ 是 NM 中的理论,现有理论 Γ 中的 3 个公式分别为 A,B,C,它们的真度分别为 $\tau_{\mathrm{NM}}(A) = 0.6, \tau_{\mathrm{NM}}(B) = 1, \tau_{\mathrm{NM}}(C) = 0.7$,试比较理论 $\Gamma_1 = \{A, B\}$ 的相容度与理论 $\Gamma_2 = \{B,C\}$ 的相容度大小关系。

解 根据 (4),(8),(10) 式知 $\rho_{\mathrm{NM}}(B,A)$ 大于 $\rho_{\mathrm{NM}}(B,C)$,因此理论 $\Gamma_1 = \{A,B\}$ 的 $\mathrm{div}(\Gamma)$ 大于理论 $\Gamma_2 = \{B,C\}$ 的 $\mathrm{div}(\Gamma)$。因为理论 $\Gamma_1 = \{A,B\}$ 的 $i(\Gamma)$ 小于理论 $\Gamma_2 = \{B,C\}$ 的 $i(\Gamma)$,所以理论 $\Gamma_1 = \{A,B\}$ 的 $\mathrm{div}(\Gamma)\left(1 - \frac{1}{2}(i(\Gamma))\right)$ 大于理论 $\Gamma_2 = \{B,C\}$ 的 $\mathrm{div}(\Gamma)\left(1 - \frac{1}{2}(i(\Gamma))\right)$,因此理论 $\Gamma_1 = \{A,B\}$ 的相容度小于理论 $\Gamma_2 = \{B,C\}$ 的相容度。

注 5 例 2 的结果验证了定义的相容度具有合理性。

6 结 论

本文在 NM 系统中首先引进了积分真度的概念,验证了积分真度 MP 规则、HS 规则,其次利用积分真度的概念引进了积分相似度和积分伪距离的概念,并验证了它们之间的一些性质,最后引进了极性指标与相容度的概念,验证了完全相容理论的相容度为 1,不相容理论的相容度为 0。

参考文献:

[1] ROSSER J B, TURQUETTE A R. Many-valued logic[M]. Amsterdamm: North-Holland, 1952: 46-66

[2] PAVELKA J. On fuzzy logic Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ[J]. Zeitschr f Math Logic and Grundlagen d Math, 1979, 25(1): 45-52

[3] WANG Guojun, FU Li, SONG Jianshe. Theory of truth degrees of propositions in two-valued logic[J]. Science in China(Series A), 2002, 45(9): 1106-1116

[4] 王国俊, 宋建设. 命题逻辑中的程度化方法[J]. 电子学报, 2006, 34(2): 252-257
WANG Guojun, SONG Jianshe. Graded method in propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(2): 252-257 (in Chinesse)

[5] 惠小静. 基于真值的 SBL_~公理化扩张系统的计量化[J]. 中国科学: 信息科学,2014, 44(7): 900-911
HUI Xiaojing. Quantification of truth-based SBL_~axomatic expansion systems[J]. Science in China: Information Science, 2014,44(7): 900-911 (in Chinese)

[6] WANG Guojun, SHE Yehong. Topological description of divergency and consistency of two-valuedpropositionaltheories[J]. Acta Mathematical Sinica, Chinese Series, 2007, 50(4): 841-850

[7] ZHOU Hongjun. Borel probabilistic and quantitative logic[J]. Science China Information Science, 2010, 53(2): 1-12

[8] WANG Guojun, LEUNG Y. Integrated semantics and logic metricspaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 136(4): 71-91

[9] WANG Guojun. A unified integrated method for evaluating goodness of propositions in several propositional logic systems and its applications[J]. Chinese Journal of Electronics, 2012, 21(2): 195-201

[10] 李骏, 邓富喜. n 值 S-MTL 命题逻辑系统中公式真度的统一理论[J]. 电子学报, 2011, 39(8): 1864-1868
LI Jun, DENG Fuxi. Unified theory of truth degrees in n-valued S-MTL propositional logic[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(8): 1864-1868 (in Chinese)

[11] 李骏, 姚锦涛. 命题逻辑系统 SMTL 中公式的积分真度理论[J]. 电子学报, 2013, 41(5): 878-883
LI Jun, YAO Jintao. Integral truth degree theory of formulas in propositional logic system SMTL[J]. Journal of Electronics, 2013, 41(5): 878-883 (in Chinese)

[12] ESTEVA F, GODO L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-normas[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124(4): 271-288

[13] 裴道武. 基于三角模的模糊逻辑理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013

PEI Daowu. Fuzzy logic theory based on triangle mode and its application[M]. Beijing: Science Press, 2013 (in Chinese)

[14] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2008
WANG Guojun. Non-classical mathematical logic and approximate reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2008 (in Chinese)

[15] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M].2 版. 北京: 科学出版社, 2006
WANG Guojun. Introduction to mathematical logical and resolution principle[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese)

[16] WANG Guojun, ZHANG Wenxiu. Consistency degrees of finite theories in Lukasiewicz propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 149(2): 275-284

[17] ZHOU Xiangnan, WANG Guojun. Consistency degrees of theories in some systems of propositional fuzzy logic[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152(2): 321-331

[18] ZHOU Hongjun, WANG Guojun. A new theory consistency index based on deduction theorems in several logic sysstem[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(3): 327-443

Unified theory of integral true degrees in NM theory

WANG Bo, HUI Xiaojing, LU Xing

(Mathematics and Computer Science College, Yan′an University, Yan′an 716000, China)

Abstract: Based on the NM propositional logic system of nilpotent minimum logic, the concept of the integral truth degree of the formula is firstly proposed by integrating the function induced by the formula, and the MP rule and HS rule of the integral truth degree are proved by means of the integral invariance. Secondly, in NM propositional logic the integral similarity and integral pseudo-distance are introduced into the set of general formulas of the system, and some good properties about the similarity and pseudo-distance are proved. Finally, in terms of the concept of divergence degrees and diameter, a new membership function for reflecting the consistency degrees of theories in NM propositional fuzzy logic is proposed, which is proved that of inconsistent theories are equal to 0 and that of completely consistent theories are equal to 1.

Keywords: NM propositional logic system; integral truth degree; pseudo-distance; consistency degree

引用格式: *王波, 惠小静, 鲁星. NM 理论中积分真度的统一理论[J]. 西北工业大学学报, 2023, 41(2): 439-445*
WANG Bo, HUI Xiaojing, LU Xing. Unified theory of integral true degrees in NM theory[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2023, 41(2): 439-445 (in Chinese)

© 2023 Journal of Northwestern Polytechnical University.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.