https://doi.org/10.1051/jnwpu/20224061212

分布参数不确定性重要性分析的高效求积公式法

刘俊超, 李璐祎

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘 要:参数重要性分析能够识别对输出性能有重要影响的关键参数,从而为结构系统的优化和设计提供指导。对于具有分布参数不确定性的结构系统,传统方法求解分布参数对输出特征值(如均值和方差)的重要性测度指标需要 3 层抽样,此过程计算量巨大。针对这一问题,提出了 2 种基于代理抽样概率密度函数(SSPDF)的分布参数不确定性重要性分析的高效求积公式方法:基于代理抽样概率密度函数的双层求积公式方法(S-DLCF)和基于代理抽样概率密度函数的单层求积公式方法(S-SLCF)。所提方法利用求积公式有效地提高了分布参数重要性测度指标中嵌套的期望和方差算子求解效率,并通过代理抽样概率密度函数解除了参数不确定性向输出特征值传递过程中计算量依赖于参数维度的问题。S-DLCF 充分利用了求积公式在求解输出统计矩时的高效性和准确性,而 S-SLCF通过扩展分布参数的维数来减少输出统计矩计算过程中的积分层数。数值算例和工程算例验证了 2 种新算法在参数重要性分析中的效率和精度。

关 键 词:分布参数不确定性;重要性分析;代理抽样概率密度函数;求积公式;单层蒙特卡洛抽样

中图分类号:TB114.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-2758(2022)06-1212-11

在工程实际中,由于生产水平、加工工艺等因素的制约,结构系统的材料特性、结构尺寸和制造误差等变量中广泛地存在多种不确定性[1]。一般按照不确定性的来源可将其分为 2 类:客观的不确定性和主观的不确定性。客观的不确定性与变量内在的固有随机性有关,是不可缩减的固有属性,而主观的不确定性与不完善的信息及有限的数据有关,可随着认知的深入和数据的丰富而减小[2]。

灵敏度分析常常用来衡量模型输入不确定性对模型输出不确定性的贡献程度[3]。灵敏度分析分为局部灵敏度分析和全局灵敏度分析。其中,全局灵敏度分析又被称为重要性测度分析,用来衡量变量在其整个不确定性范围内变化时对输出性能统计特征的贡献程度[4]。目前国内外学者们对输入变量的重要性测度分析方法做了大量的研究,比如 Saltelli[5] 提出了基于非参数的方法,Sobol[6] 提出了基于方差的重要性分析方法,Borgonovo[7] 提出了矩独立分析方法。由于基于方差的重要性测度分析方法具有模型独立、重要性测度与输入-输出关系一一对应等良好的特性,是目前国际上最常使用的方法之一[8]。

上述提到的重要性测度分析方法并没有考虑输入变量分布参数的不确定性,但实际上由于认知和测量水平的限制,输入变量的分布参数并非是确切可知的,因此分布参数具有不确定性的重要性分析方法得到了越来越多的关注[9]。分布参数的不确定性有多种描述方式,常见的有区间模型[10]、模糊集模型[11]以及主观概率密度函数[12]等。对于存在分布参数不确定性的情况,输入变量和分布参数的不确定性传递过程可定性地描述为:分布参数→输入变量→输出变量→输出性能统计特征。因此分布参数的不确定性会引起输出性能统计特征的不确定性,这就要求在进行重要性分析时考虑分布参数在其整个变化范围内对模型输出性能统计特征的

收稿日期:2022-03-05 **基金项目**:国家自然科学基金(51875464)资助

作者简介:刘俊超(1998—),西北工业大学硕士研究生,主要从事结构可靠性研究。

通信作者:李璐祎(1987—),西北工业大学教授,主要从事航空航天可靠性工程研究。e-mail:luyili@ nwpu.edu.cn

影响。

对于分布参数具有不确定性的模型,本文借助输入变量基于方差的重要性分析思想,建立了衡量分布参数对输出统计矩影响的重要性测度指标,并针对直接求解分布参数重要性测度指标需要 3 层蒙特卡洛(Monte Carlo,MC)抽样,计算成本过高的问题,提出 2 种基于代理抽样概率密度函数(surrogate sampling probability density function,SSPDF)[13]的求积公式(cubature formula,CF)方法来解决此问题。所提分析方法首先将求积公式运用到分布参数不确定性基于方差的重要性测度指标求解过程中,以提高分布参数重要性测度指标中嵌套的期望和方差算子的计算效率;其次,引入代理抽样概率密度函数方法,以降低输入变量参数不确定性向输出性能统计矩传递过程中的计算量;最后,将单层蒙特卡洛(quasi-Monte Carlo,QMC)方法[5]与求积公式相结合,以降低重要性测度指标求解过程中嵌套的期望和方差算子的计算量。

1　分布参数基于方差的重要性测度指标

当输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的分布参数具有不确定性时,输出的统计特征值也将具有不确定性。衡量输入变量的单个分布参数或多个分布参数的交互作用对模型输出统计特征值(这里以均值、方差为例)方差的贡献程度,可以为改变分布参数以减小模型输出的不确定度提供依据[14]。

当输入变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_{d_X})$ 的分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 具有不确定性时,模型输出将同时具有主观不确定和客观不确定,可表示为

$$Y=g(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Theta}) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{\Theta}=(\Theta_1,\Theta_2,\cdots,\Theta_{d_\Theta})$ 是输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的 d_Θ 维相互独立的分布参数变量。在本文中,参数的主观不确定性用主观概率密度函数 $f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})$ 来描述[12]。当 $\boldsymbol{\Theta}$ 取某一特定值 $\boldsymbol{\theta}^{(\cdot)}$ 时,输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的不确定性由条件概率密度函数 $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^{(\cdot)})$ 来衡量。

当输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 具有不确定性时,输出的均值和方差不再只受到输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的不确定性影响,而是可以描述为分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 的函数

$$M=E_{\boldsymbol{X}}(Y\mid\boldsymbol{\Theta})=\phi(\boldsymbol{\Theta}) \tag{2}$$

$$D=V_{\boldsymbol{X}}(Y\mid\boldsymbol{\Theta})=\psi(\boldsymbol{\Theta}) \tag{3}$$

因此,类似于输入变量的基于方差的重要性测度的定义,分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 分别对 M 和 D 的主重要性测度和总重要性测度如(4) ~ (5) 式和(6) ~ (7) 式所示

$$S_{iM}=\frac{V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(M\mid\Theta_i)]}{V(M)} \tag{4}$$

$$S_{iD}=\frac{V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(D\mid\Theta_i)]}{V(D)} \tag{5}$$

$$S_{iM}^{\mathrm{T}}=\frac{E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[V_{\Theta_i}(M\mid\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]}{V(M)}=1-\frac{V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(M\mid\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]}{V(M)} \tag{6}$$

$$S_{iD}^{\mathrm{T}}=\frac{E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[V_{\Theta_i}(D\mid\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]}{V(D)}=1-\frac{V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(D\mid\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]}{V(D)} \tag{7}$$

式中,$\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}=(\Theta_1,\cdots,\Theta_{i-1},\Theta_{i+1},\cdots,\Theta_{d_\Theta})$ 是除了 Θ_i 以外的所有参数变量,主重要性测度 S_{iM} 和 S_{iD} 分别表示参数变量 Θ_i 单独作用对输出均值 M 和方差 D 不确定性的贡献,总重要性测度 S_{iM}^{T} 和 S_{iD}^{T} 分别表示参数变量 Θ_i 单独作用以及与其他所有参数变量的交互作用对 M 和 D 不确定性的总贡献[15]。

2　分布参数基于方差的重要性测度指标求解的高效方法

从(4)~(7)式可以看出,求解参数的重要性测度指标的关键仍在于求解嵌套的期望和方差算子。然而,不同于输入变量基于方差的重要性测度指标,参数的重要性测度指标求解过程需要将参数的不确定性传递到输出均值和方差,是一个分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 和输入变量 $\boldsymbol{X}$ 嵌套的双层抽样过程。如果利用抽样方法求解(4)~(7)式中指标,则整个过程是一个“3 层嵌套”的抽样过程,计算量太大难以为工程实际所接受[15]。求积公式利用少量的积分点和权重便能计算输出的均值和方差,并且对更高维度的输入仍有良好的适用性与精确度[16]。Li 等[13]提出的代理抽样概率密度函数方法可以将参数不确定性向输出均值和方差传递过程中的双层抽样简化为单层,在很大程度上提高了参数不确定性传递的效率。因此,本文将 CF 和 SSPDF 引入到参数的重要性分析中,首先提出了参数重要性测度指标求解的 S-DLCF 算法,然后再结合 QMC 方法,提出了 S-SLCF 算法。

2.1 求积公式

对于一个模型 $Z=\varphi(\boldsymbol{\Theta})$($Z$ 可以是(2)式中的均值 M 或(3)式中的方差 D),由于 CF 估计统计矩是在标准正态空间中进行的[17],因此首先通过 Rosenblatt 变换或 Nataf 变换将该模型转化为独立标准正态变量 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^{d_\Theta})$ 的一个函数[18]

$$Z=\varphi(\boldsymbol{\Theta})=\varphi(R^{-1}(\boldsymbol{\lambda}))=\rho(\boldsymbol{\lambda}) \tag{8}$$

式中,$R^{-1}(\cdot)$ 表示 Rosenblatt 变换或 Nataf 变换;$\rho(\boldsymbol{\lambda})$ 表示独立标准正态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的多元函数。

因此,根据(8)式,Z 的一阶和二阶中心距,也即 Z 的期望和方差,可以表示为

$$\mu_Z=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(\boldsymbol{\lambda})f_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \tag{9}$$

$$\sigma_Z^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho(\boldsymbol{\lambda})-\mu_Z)^2f_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda})\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda} \tag{10}$$

式中,$f_{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{\lambda})$ 表示独立标准正态变量 $\boldsymbol{\lambda}$ 的联合概率密度函数。

根据求积公式的理论,(9)~(10)式中的积分可利用少量合适的积分点和相应的积分权重高效地计算得出,可以表示为[19]

$$\mu_Z=\sum_{j=1}^{N}\omega_j\rho(\boldsymbol{\lambda}_j) \tag{11}$$

$$\sigma_Z^2=\sum_{j=1}^{N}\omega_j(\rho(\boldsymbol{\lambda}_j)-\mu_Z)^2 \tag{12}$$

式中,N 是求积权重 ω_j 与相应的积分点 λ_j 的数目。

Xu 等[18]已经证明了 CF 能够精确估计大多数问题中函数的一阶矩和二阶矩。表 1~2 中列出了目前已知的最有效的 5 类求积公式,从其中可以看出,CF 所需的积分点个数与变量维数有关且呈二次增长关系。

表 1 公式Ⅰ~Ⅳ的积分点个数[18]

方法	积分点的个数
公式Ⅰ	$d_\Theta^2+d_\Theta+2,2\leqslant d_\Theta\leqslant 7$
公式Ⅱ	$d_\Theta^2+3d_\Theta+3,d_\Theta>3$
公式Ⅲ	$2d_\Theta^2+1$
公式Ⅳ	$2d_\Theta^2+1$

表 2 公式Ⅴ中的积分点个数[18]

维度 d_Θ	数目	维度 d_Θ	数目
3	14	7	78
4	24	8	144
5	42	9	146
6	44	10	276

对于中低等维度变量,积分点的个数只有几十个或几百个,体现出了高效性[19]。公式Ⅰ、Ⅱ和Ⅴ受限于变量维度,公式Ⅳ的计算误差随变量维数的增加而增加,公式Ⅲ的计算误差相比较而言更加稳定[16]。

因此,本文选择公式Ⅲ计算嵌套的期望和方差,其表示形式为

$$I(r)=\frac{2}{d_\Theta+2}r(\boldsymbol{0})+\frac{4-d_\Theta}{2(d_\Theta+2)^2}\sum_{\text{full sym}}r(\sqrt{d_\Theta+2},0,\cdots,0)+\frac{1}{(d_\Theta+2)^2}\sum_{\text{full sym}}r\left(\sqrt{\frac{d_\Theta}{2}+1},\sqrt{\frac{d_\Theta}{2}+1},0,\cdots,0\right) \tag{13}$$

式中:$I(\cdot)$ 表示积分的简写;如果考虑(11)式中 μ_Z 及(12)式中 σ_Z^2,则 $r(\cdot)$ 分别为 $\rho(\boldsymbol{\lambda})$ 和 $(\rho(\boldsymbol{\lambda})-\mu_Z)^2$。

2.2 代理抽样概率密度函数方法

2.1 节中的求积公式方法可以高效地求解(4)~(7)式中嵌套的期望和方差算子。然而,在求解过程中首先需要将参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 的不确定性传递到输出的均值和方差,该过程需要双层嵌套的输入变量 $\boldsymbol{X}$ 和参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 抽样。为解决计算成本昂贵的问题,Li 等[13]提出了代理抽样概率密度函数方法。

考虑(8)式中的输出均值模型,通过引入 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)$,可将输出均值 M 表示为

$$M=E_{\boldsymbol{X}}(Y\mid\boldsymbol{\Theta})=\int_{R^{d_X}}g(\boldsymbol{X})f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_{R^{d_X}}g(\boldsymbol{X})\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)}h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)\mathrm{d}\boldsymbol{x}=E_{\boldsymbol{X}}^*\left[g(\boldsymbol{X})\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)}\right] \tag{14}$$

式中,R^{d_X} 为 d_X 维输入变量的空间;$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})$ 为在分布参数条件下输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的概率密度函数;$E_{\boldsymbol{X}}^*[\cdot]$ 表示关于代理抽样概率密度函数求均值。

根据方差的计算式 $V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$,(9)式中的输出方差模型引入 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)$ 后,可将输出方差 D 表示为

$$D=V_{\boldsymbol{X}}(Y\mid\boldsymbol{\Theta})=E_{\boldsymbol{X}}(Y^2\mid\boldsymbol{\Theta})-E_{\boldsymbol{X}}^2(Y\mid\boldsymbol{\Theta})=E_{\boldsymbol{X}}^*\left[g^2(\boldsymbol{X})\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)}\right]-E_{\boldsymbol{X}}^{*2}\left[g(\boldsymbol{X})\frac{f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta})}{h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{\theta}^*)}\right] \tag{15}$$

由(14)~(15)式可知,当在输出均值和方差函数的计算过程中引入 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$ 时,输入变量 $\boldsymbol{X}$ 是由含有确定参数 $\boldsymbol{\theta}^*$ 的 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$ 产生,不依赖于真实的分布参数。因此,在计算 M 和 D 时,分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 在外层变化,内层所产生的输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的样本可重复使用。

采用(14) ~ (15) 式计算 M 和 D 时,SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$ 的选取是关键。文献[13]指出,当输入变量 $\boldsymbol{X}$ 随其具有不确定性的分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 改变时,$h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$ 应该覆盖输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的整个变化范围。一种简单而直接的方法是,根据分布参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 的变化范围确定相应的输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的极限分布,然后根据输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的极限分布确定 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$。具体的选取方法可参考文献[13]。

2.3　基于代理抽样概率密度函数的双层求积公式(S-DLCF)算法

将(2)~(3)式中的输出期望和方差模型统一表示为 2.1 节提到的 $Z=\varphi(\boldsymbol{\Theta})$,参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 的不确定性可以通过 2.2 节的代理抽样概率密度方法传递到输出 Z。从(4) ~ (7)式可以看出,求解重要性测度指标的关键是计算分布参数对 Z 方差的贡献 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$ 和 $V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$,而这些方差贡献均是期望和方差算子的嵌套。由于该算法的双层嵌套过程较长,将其分为两部分进行描述。

首先,求解 S_{iZ},也即通过 S-DLCF 求解分布参数 $\boldsymbol{\Theta}_i$ 对 Z 的主重要性测度,其基本步骤如下所示[19]

1) 估计无条件期望 $E(Z)$ 和方差 $V(Z)$

① 根据求积公式 Ⅲ 产生 d_{Θ} 维分布参数的积分点 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$。通过 Rosenblatt 变换或 Nataf 变换将 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$ 变换到原模型空间得到 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$。

② 根据2.2 节方法确定SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$,并由 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$ 抽取输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的 N_X 个样本 $\boldsymbol{x}_k(k=1,\cdots,N_X)$,进而求得相应的模型输出 Y。

③ 根据 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^*)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的样本 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta}^*)(k=1,\cdots,N_X)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta})(k=1,\cdots,N_X)$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x}_k)(k=1,\cdots,N_X)$ 以及 $\boldsymbol{\Theta}$ 的积分点 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$,利用(14) 式或(15) 式求解得到 Z 的积分点 $z_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$。

④ 由 $z_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$ 和 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta})$ 利用(13) 式求解 Z 的期望 $E(Z)$ 和方差 $V(Z)$。

2) 估计 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)$ 和 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$

① 根据求积公式 Ⅲ 产生一维分布参数的积分点 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$。通过 Rosenblatt 变换或 Nataf 变换将 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 变换到原模型空间得到 $\theta_l^1(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$。

② 当参数 $\boldsymbol{\Theta}_i=\theta_l^1(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 时,根据 2.2 节方法确定新的 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_{\sim i}^*,\theta_l^1)$,并由 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_{\sim i}^*,\theta_l^1)$ 抽取输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的 N_X 个样本 $\boldsymbol{x}_k'(k=1,\cdots,N_X)$,进而求得相应的模型输出 Y'。

③ 根据求积公式 Ⅲ 产生 $d_{\Theta}-1$ 维分布参数的积分点 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$。通过 Rosenblatt 变换或 Nataf 变换将 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 变换到原模型空间得到 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$。

④ 根据 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_{\sim i}^*,\theta_l^1)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}_{\sim i},\theta_l^1)$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的样本 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k'|\boldsymbol{\theta}_{\sim i}^*,\theta_l^1)(k=1,\cdots,N_X)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k'|\boldsymbol{\theta}_{\sim i},\theta_l^1)(k=1,\cdots,N_X)$ 和 $Y'=g(\boldsymbol{x}_k')(k=1,\cdots,N_X)$ 以及 $\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}$ 的积分点 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$,利用(14) 或(15) 式求解 $z_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$。

⑤ 由 $z_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 和 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 利用(13) 式求解 Z 的条件期望 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta_l^1)(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$。

⑥ 条件期望 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta_l^1)(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 可以看作是单变量 $\boldsymbol{\Theta}_i$ 的函数,由 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i=\theta_l^1)(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 和 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 利用(19) 式求解 $E_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$ 和 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$。

3) 将求得的 $V(Z)$ 和 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$ 代入(4) 或(5) 式中便可得到 S_{iZ}。

类似地,求解 S_{iZ}^{T},其基本步骤如下所示[19]。

1) 和求解主重要性测度时的步骤 1) 相同。

2) 估计 $V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})$ 和 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$

① 根据求积公式 Ⅲ 产生 $d_{\Theta}-1$ 维分布参数的积分点 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$。将 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 变换到原模型空间得到 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$。

② 当参数 $\boldsymbol{\Theta}_{i\sim}=\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1}(l=1,\cdots,N_\Theta^{d_\Theta-1})$ 时,根据 2.2 节方法确定新的 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(x|\theta_i^*,\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1})$,并由 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\theta_i^*,\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1})$ 抽取输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的 N_X 个样本 $\boldsymbol{x}_k'(k=1,\cdots,N_X)$,进而求得相应的模型输出 Y'。

③ 根据求积公式 Ⅲ 产生一维分布参数的积分点 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_\Theta^1)$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,$

N_{Θ}^{1})。将 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$ 变换到原模型空间得到 $\theta_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$。

④ 根据 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\theta_i^{*},\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\theta_i,\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的样本 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k'|\theta_i^{*},\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})(k=1,\cdots,N_X)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k'|\theta_i,\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})(k=1,\cdots,N_X)$ 和 $Y'=g(\boldsymbol{x}_k')(k=1,\cdots,N_X)$ 以及 $\boldsymbol{\Theta}_i$ 的积分点 $\theta_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$,利用(14)或(15)式求解 Z 的积分点 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$。

⑤ 由 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$ 和 $\omega_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{1})$ 利用(13)式求解 Z 的条件期望 $E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}=\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{d_{\Theta}-1})$ 和条件方差 $V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}=\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{d_{\Theta}-1})$。

⑥ 由 $V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}=\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{d_{\Theta}-1})$ 和 $\omega_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{d_{\Theta}-1})$ 利用(13)式求解 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$。

3)将求得的 $V(Z)$ 和 $E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[V_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$ 代入(6)或(7)式便可得到 S_{iZ}^{T}。

2.4 基于代理抽样概率密度函数的单层求积公式(S-SLCF)算法

该算法将 QMC 方法[5] 的思想引入到求解嵌套的期望与方差中。对于模型 $Z=\varphi(\boldsymbol{\Theta})$,以方差贡献 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$ 和 $V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$ 为例,准蒙特卡洛法求解嵌套期望和方差可表示为

$$
\begin{aligned}
&V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\Theta_i)]=E_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}^2(Z|\Theta_i)]-E_{\Theta_i}^2[E_{\Theta_{\sim i}}(Z|\Theta_i)]=\int_{R^1}\left[\int_{R^{d_{\Theta}-1}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{\sim i}\right]^2\cdot\\
&f_{\Theta_i}(\theta_i)\mathrm{d}\theta_i-E^2(Z)=\int_{R^1}\left[\int_{R^{d_{\Theta}-1}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})\mathrm{d}\theta_{\sim i}\times\int_{R^{d_{\Theta}-1}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}'_{\sim i}\right]\cdot\qquad(16)\\
&f_{\Theta_i}(\theta_i)\mathrm{d}\theta_i-E^2(Z)=\int_{R^{2d_{\Theta}-1}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})\cdot f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}'_{\sim i}-E^2(Z)=E[G(\boldsymbol{\Theta})]-E^2(Z)
\end{aligned}
$$

式中,$\boldsymbol{\theta}_{\sim i}$ 和 $\boldsymbol{\theta}'_{\sim i}$ 是由条件概率密度函数 $f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})$ 产生的 2 组不同的条件样本点,$G(\boldsymbol{\Theta})=\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})$。对于(16)式中模型 $Z=\varphi(\boldsymbol{\Theta})$ 的条件输出的求解仍可利用(14)或(15)式的代理抽样概率密度函数方法。

根据(16)式,通过将积分维度从 d_{Θ} 维扩展到 $2d_{\Theta}-1$ 维,可将(10)式或(11)式中的双层嵌套积分简化为单层积分,只需要分别估计期望 $E[G(\boldsymbol{\Theta})]$ 和无条件期望 $E(Z)$ 便可得到 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\Theta_i)]$,进而可得主重要性测度,这大大简化了求解过程。

同样地,求解 $V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$ 可被简化为

$$
\begin{aligned}
&V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]=\int_{R^{d_{\Theta}-1}}\left[\int_{R^1}\varphi_{\Theta_i}(\theta_i)f_{\Theta_i}(\theta_i)\mathrm{d}\theta_i\right]^2 f_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}_{\sim i})\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}_{\sim i}-E^2(Z)=\\
&\int_{R^{d_{\Theta}+1}}\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})\varphi_{\Theta_i}(\theta'_i)f_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\theta})f_{\Theta_i}(\theta'_i)\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}'_i-E^2(Z)=E[G'(\boldsymbol{\Theta})]-E^2(Z)\qquad(17)
\end{aligned}
$$

式中,$G'(\boldsymbol{\Theta})=\varphi_{\boldsymbol{\Theta}}(\boldsymbol{\Theta})\varphi_{\Theta_i}(\boldsymbol{\Theta}'_i)$。利用(17)式求解 $V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$,关键是分别求解 $d_{\Theta}+1$ 维函数 $G'(\boldsymbol{\Theta})$ 的期望 $E[G'(\boldsymbol{\Theta})]$。

利用 S-SLCF 方法求解分布参数 $\boldsymbol{\Theta}_i$ 对 Z 的主重要性测度和总重要性测度的基本步骤为:

1)根据求积公式 Ⅲ 产生 $2d_{\Theta}$ 维分布参数的积分点 $\boldsymbol{\xi}_l^{2d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 和相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$。将 $\boldsymbol{\xi}_l^{2d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 分解为三部分:前($1\sim d_{\Theta}$)维记为 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,第($d_{\Theta}+1\sim 2d_{\Theta}-1$)维记为 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_{\Theta}-1}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,第 $2d_{\Theta}$ 维记为 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$。

2)将 $\boldsymbol{\xi}_l^{d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,$\boldsymbol{\xi}_l^{d_{\Theta}-1}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 和 $\xi_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 分别变换到原模型空间得到 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,$\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}-1}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 和 $\theta_l^1(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,并将 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}}$ 表示为 $(\theta_{i,l}^{d_{\Theta}},\boldsymbol{\theta}_{\sim i,l}^{d_{\Theta}})$。

3)根据 2.2 节确定相应的 SSPDF $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^{*})$,用 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^{*})$ 抽取输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的 N_X 个样本 $\boldsymbol{x}_k(k=1,\cdots,N_X)$,进而求得相应的模型输出 Y。

4)根据 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta}^{*})$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的样本 $h_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta}^{*})(k=1,\cdots,N_X)$,$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta})(k=1,\cdots,N_X)$,$Y=g(\boldsymbol{x}_k)(k=1,\cdots,N_X)$ 和 $\boldsymbol{\Theta}$ 的积分点 $\boldsymbol{\theta}_l^{d_{\Theta}}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$,利用(14)式或(15)式求解 Z 的积分点 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$。

5)由 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_{\Theta}})$ 和权重 $\omega_l(l=1,\cdots,$

$N_{\Theta}^{2d_\Theta}$) 利用(13)式求解 Z 的期望 $E(Z)$ 和方差 $V(Z)$。

6) 当 $\boldsymbol{\Theta}=(\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1},\theta_{i,l}^{d_\Theta})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 时,根据样本 $h_X(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta}^*)(k=1,\cdots,N_X)$,$f_X(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1},\theta_{i,l}^{d_\Theta})(k=1,\cdots,N_X)$,$Y=g(\boldsymbol{x}_k)(k=1,\cdots,N_X)$ 和积分点$(\boldsymbol{\theta}_l^{d_\Theta-1},\theta_{i,l}^{d_\Theta})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$,利用(14)或(15)式求解 $z'_{\sim i,l}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$。

7) 由 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 和 $z'_{\sim i,l}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 以及相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$,利用(13)式求解函数 $G(\boldsymbol{\Theta})=\varphi(\boldsymbol{\theta})\varphi_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(\boldsymbol{\theta}'_{\sim i})$ 的期望 $E[G(\boldsymbol{\Theta})]$。

8) 将 $E[G(\boldsymbol{\Theta})]$ 和 $E(Z)$ 代入到式(16)中得到 $V_{\Theta_i}[E_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}(Z|\boldsymbol{\Theta}_i)]$,将该结果及步骤 5) 中求得的 $V(Z)$ 代入到(4)式或(5)式中得到 S_{iZ}。

9) 当 $\boldsymbol{\Theta}=(\theta_l^1,\boldsymbol{\theta}_{\sim i,l}^{d_\Theta})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 时,根据样本 $h_X(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{\theta}^*)(k=1,\cdots,N_X)$,$f_X(\boldsymbol{x}_k|\theta_l^1,\boldsymbol{\theta}_{\sim i,l}^{d_\Theta})(k=1,\cdots,N_X)$ 和 $Y=g(\boldsymbol{x}_k)(k=1,\cdots,N_X)$ 以及积分点$(\theta_l^1,\boldsymbol{\theta}_{\sim i,l}^{d_\Theta})(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$,利用(14)或(15)式求解 $z'_{i,l}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$。

10) 由 $z_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 和 $z'_{i,l}(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$ 以及相应的权重 $\omega_l(l=1,\cdots,N_{\Theta}^{2d_\Theta})$,利用(13)式求解函数 $G'(\boldsymbol{\Theta})=\varphi(\boldsymbol{\theta})\varphi_{\Theta_i}(\theta'_i)$ 的期望 $E[G'(\boldsymbol{\Theta})]$。

11) 将 $E[G'(\boldsymbol{\Theta})]$ 和 $E(Z)$ 代入到(17)式中得到 $V_{\boldsymbol{\Theta}_{\sim i}}[E_{\Theta_i}(Z|\boldsymbol{\Theta}_{\sim i})]$,将结果及步骤 5) 中求得的 $V(Z)$ 代入到(6)或(7)式中得到 S_{iZ}^{T}。

2.5　2 种算法的比较

将 2.3 节和 2.4 节对比来看,2 种新方法都利用了求积公式求解积分时的高效性和准确性,S-SLCF 比 S-DLCF 更加简洁明了,这是因为 S-DLCF 分两部分求解主和总重要性测度,而 S-SLCF 只需要单层抽样便可求得这 2 个指标。另外,在求解 S_{iZ} 和 S_{iZ}^{T} 时,S-DLCF 和 S-SLCF 所需要调用功能函数的次数分别为 $(N_\Theta^1+N_\Theta^{d_\Theta-1})\times d_\Theta\times N_X+N_X$ 和 N_X。

3　算例分析

在本节的算例计算过程中,为了验证所提方法的效率和精度,以 MC 方法所得结果作为参考解[20],以 QMC 方法所得结果作为对比解。在求解分布参数的主重要性测度指标和总重要性测度指标时,MC 方法的模型调用次数为 $d_\Theta\times N_\Theta\times N_\Theta\times N_X$,QMC 方法的模型调用次数为 $(d_\Theta+2)\times N_\Theta\times N_X$,其中 MC 方法中的样本量统一为 $N_X=N_\Theta=2\,500$,QMC 方法中的样本量统一为 $N_X=N_\Theta=30\,000$,以保证所求的重要性测度指标收敛。

3.1　可加性非线性模型

考虑非线性程度较小的功能函数 $g(\boldsymbol{X})=40-18X_1+X_2^2+X_2+X_3^2+5X_3$。其中输入变量 X_1,X_2 和 X_3 相互独立且服从同一均值为 μ,标准差为 1 的正态分布,同时分布参数具有不确定性且服从正态分布,即 $\mu_i\sim N(4,1^2)(i=1,2,3)$。

根据 SSPDF 的选取原则,该算例中选取 SSPDF 为正态分布 $N(4,2^2)$ 来抽取输入变量 $\boldsymbol{X}$ 的样本。

2 种所提方法计算得到的重要性测度指标如表 3 所示,e_{QMC},$e_{\text{S-DLCF}}$,$e_{\text{S-SLCF}}$ 分别表示各方法相对于 MC 方法得到的参考解的相对误差。其中,4 种方法的计算量分别为 $3\times(2\,500)^3$,$5\times(30\,000)^2$,$37\times1\,000$,$5\,000$。

表 3　算例 3.1 的重要性测度指标的计算结果

重要性指标		MC	QMC	e_{QMC}/%	S-DLCF	$e_{\text{S-DLCF}}$/%	S-SLCF	$e_{\text{S-SLCF}}$/%
S_{iM}	μ_1	0.564 78	0.555 97	1.56	0.564 70	0.01	0.564 31	0.08
	μ_2	0.140 33	0.138 80	1.09	0.139 50	0.59	0.141 70	0.98
	μ_3	0.289 78	0.288 22	0.54	0.288 80	0.34	0.291 40	0.56
S_{iM}^{T}	μ_1	0.562 39	0.562 52	0.02	0.564 08	0.30	0.562 05	0.06
	μ_2	0.140 19	0.140 71	0.37	0.141 34	0.82	0.140 56	0.26
	μ_3	0.286 15	0.278 75	2.59	0.285 11	0.36	0.291 40	1.83
S_{iD}	μ_1	0.003 70	0.005 28	42.58	0.003 68	0.64	0.004 02	8.37
	μ_2	0.305 42	0.305 32	0.03	0.304 03	0.45	0.309 11	1.21
	μ_3	0.642 13	0.641 64	0.08	0.642 20	0.01	0.641 69	0.07
S_{iD}^{T}	μ_1	0.053 31	0.054 44	2.11	0.052 28	1.93	0.052 64	1.26
	μ_2	0.373 15	0.384 33	3.00	0.377 33	1.12	0.372 86	0.08
	μ_3	0.675 23	0.683 41	1.21	0.679 97	0.70	0.679 52	0.64

从表 3 中可以看出,本文 2 种方法都在很大程度上提高了重要性分析的计算效率,并且计算结果与参考解吻合良好。相比于 QMC 方法,所提方法不但提高了计算效率,并且具有更高的计算精度。根据参数对输出均值的重要性测度指标 S_{iM} 和 S_{iM}^{T},各分布参数的重要性排序均为 $\mu_1 > \mu_3 > \mu_2$,这表明在控制输出均值的稳定性时,应该注重对分布参数 μ_1 的主观信息收集;根据参数对输出方差的重要性测度指标 S_{iD} 和 S_{iD}^{T},分布参数 μ_3 对输出方差的影响均为最大,μ_2 次之,μ_1 最小,这表明在实际过程中,通过对分布参数 μ_3 的主观信息收集能够最大程度地减小输出方差的变异性。

3.2 铆接结构

在航空工业中,真实的铆接过程非常复杂,本文以无头铆钉为例,将铆接过程简化为如图 1 所示的 2 个阶段。第 Ⅰ 阶段中,铆钉从状态 A(冲击前的初始状态,无变形)到状态 B(中间状态,铆钉和孔隙之间无缝隙)。第 Ⅱ 阶段中,铆钉从状态 B 到状态 C(铆钉受冲击后的最终状态,头部被加工成型)。

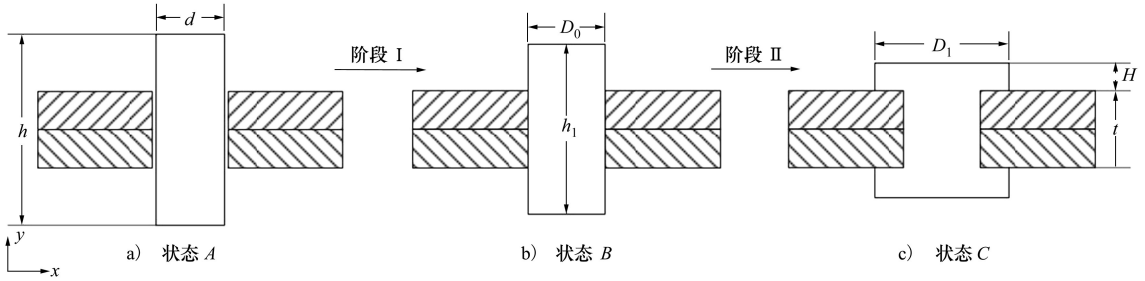


图 1 简化的无头铆钉铆接过程

为了建立铆接过程中的铆钉挤压应力与几何尺寸之间的数学关系,可以假设以下几个理想条件:

1) 铆接过程中铆钉孔直径不变

2) 铆钉体积的改变忽略不计

3) 铆接过程结束后,铆钉的受力面为圆柱面

4) 铆钉材料具有各向同性

铆接前,图 1a) 中的状态 A 下铆钉的初始体积 V_0 可以由(18)式表示

$$V_0 = \frac{\pi}{4} d^2 h \tag{18}$$

式中,d 和 h 分别表示状态 A 下铆钉的直径和长度。

第 Ⅰ 阶段后,状态 B 下铆钉的体积可由(19)式表示为

$$V_1 = \frac{\pi}{4} D_0^2 h_1 \tag{19}$$

式中,D_0 和 h_1 分别表示状态 B 下铆钉的直径和长度。

第 Ⅱ 阶段后,假设铆钉在状态 C 下的上下表面的尺寸相同,则状态 C 下铆钉的体积可由(20)式表示为

$$V_2 = \frac{\pi}{4} D_0^2 t + 2 \times \frac{\pi}{4} D_1^2 H \tag{20}$$

式中:t 为薄壁件的整体厚度;D_1 和 H 分别表示状态 C 下铆钉头的直径和长度。

根据硬化强度理论,y 方向上的最大挤压应力 $\sigma_{\max}$ 可以由(21)式表示为

$$\sigma_{\max} = K(\varepsilon_y)^{n_{\mathrm{SHE}}} \tag{21}$$

式中:K 为强度系数;n_{SHE} 为铆钉材料的硬化因子;ε_y 为铆钉头在铆接过程中 y 方向上的真实应变。真实应变 ε_y 由第 Ⅰ 阶段中产生的应变 ε_{y1} 和第 Ⅱ 阶段中产生的应变 ε_{y2} 组成,因此,ε_y 可由(22)式表示为

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} \tag{22}$$

式中:$\varepsilon_{y1} = \ln \dfrac{h}{h_1}$;$\varepsilon_{y2} = \ln \dfrac{h_1 - t}{2H}$。

已经假设铆钉在铆接过程中体积不变,由(18)~(22)式可得铆钉的最大挤压应力可以由(23)式表示为

$$\sigma_{\max} = K\left(\ln \frac{d^2 h - D_0^2 t}{2Hd^2}\right)^{n_{\mathrm{SHE}}} \tag{23}$$

本文选取的铆钉材料为 2017-T4,其硬化指数 $n_{\mathrm{SHE}} = 0.15$。为保证铆钉上下端有一定的余量,假设铆钉头高度 $H = 2.2$ mm。根据材料手册,铆钉的挤压强度为 $\sigma_{\mathrm{sq}} = 565$ MPa,如果最大挤压应力大于挤压强度,铆钉就可能会失效,因此可以建立极限状态方程如(24)式所示

$$g = \sigma_{sq} - \sigma_{max} \tag{24}$$

在整个铆接过程中,假设各随机变量之间相互独立且服从表 4 所示的正态分布,其均值存在主观不确定性且服从表 5 所示的正态分布。

表 4　无头铆钉的输入变量的分布参数

输入变量	均值	标准差
d/mm	μ_d	0.5
h/mm	μ_h	2
D_0/mm	μ_{D_0}	0.051
t/mm	μ_t	0.05
K/MPa	μ_K	10.944

表 5　无头铆钉的输入变量均值的分布参数

参数	均值	标准差
μ_d	5	0.1
μ_h	20	0.5
μ_{D_0}	5.1	0.051
μ_t	5	0.05
μ_K	547.2	5.472

根据选取原则,该算例中输入变量 d,h,D_0,t 和 K 的 SSPDF 分别为 $N(5,0.6^2)$,$N(20,2.5^2)$,$N(5.1,0.102^2)$,$N(5,0.1^2)$ 和 $N(547.2,16.416^2)$。

表 6 展示了 4 种方法得到的重要性测度指标以及每种方法所需调用功能函数的次数,从中可以得出,4 种方法的计算量分别为 $5\times(2\ 500)^3$,$7\times(30\ 000)^2$,181×10 000,18 000。从表中可以看出,相比于 MC 方法和 QMC 方法,S-DLCF 方法和 S-SLCF方法在满足计算精度的前提下,2 种新方法都能有效降低分布参数重要性分析过程中的计算量,并且 S-SLCF 方法比 S-DLCF 方法的计算量更少,表现了 S-SLCF 方法在重要性测度指标求解过程中更高的计算效率。

从图 2~3 可以得出,各分布参数不确定性的 2 个重要性测度指标 S_{iM} 和 S_{iM}^{T} 的大小近似相同,这说明各分布参数分别与其他参数的交互作用对输出均值的影响可以忽略不计。各分布参数的重要性测度排序为:$\mu_K > \mu_h > \mu_d > \mu_{D_0} > \mu_t$,因此要最大程度地提高结构系统输出均值的稳定性,需对参数 μ_K 进行有效调节;分布参数不确定性的 2 个重要性测度指标 S_{iD} 和 S_{iD}^{T} 的大小不同而其趋势近似相同,这说明分布参数之间的交互作用对输出方差有一定的影响。各分布参数的重要性排序为:$\mu_h > \mu_d > \mu_{D_0} >$

表 6　算例 3.2 的重要性测度指标的计算结果

重要性指标		MC	QMC	e_{QMC}/%	S-DLCF	$e_{S\text{-}DLCF}$/%	S-SLCF	$e_{S\text{-}SLCF}$/%
S_{iM}	μ_d	0.039 46	0.038 61	2.16	0.039 11	0.90	0.039 44	0.04
	μ_h	0.169 30	0.169 67	0.22	0.169 19	0.07	0.170 26	0.57
	μ_{D_0}	0.008 66	0.006 23	28.08	0.008 64	0.19	0.008 58	0.92
	μ_t	0.002 17	0.001 25	42.26	0.002 17	0.06	0.002 10	3.21
	μ_K	0.776 59	0.775 43	0.15	0.775 12	0.19	0.777 27	0.09
S_{iM}^{T}	μ_d	0.043 58	0.043 18	0.92	0.043 21	0.86	0.043 51	0.16
	μ_h	0.184 77	0.188 15	1.83	0.184 03	0.40	0.183 08	0.92
	μ_{D_0}	0.019 90	0.014 21	28.59	0.018 96	4.71	0.019 34	2.79
	μ_t	0.014 57	0.014 31	1.79	0.014 17	2.75	0.014 26	2.18
	μ_K	0.783 46	0.785 23	0.23	0.781 32	0.27	0.783 26	0.02
S_{iD}	μ_d	0.295 94	0.291 01	1.67	0.303 34	2.50	0.291 42	1.53
	μ_h	0.407 56	0.398 71	2.17	0.403 82	0.92	0.412 94	1.32
	μ_{D_0}	0.044 76	0.046 52	3.93	0.044 52	0.53	0.043 02	3.88
	μ_t	0.011 64	0.011 48	1.42	0.011 65	0.02	0.011 62	0.20
	μ_K	0.006 80	0.011 13	63.69	0.006 91	1.68	0.006 65	2.24
S_{iD}^{T}	μ_d	0.489 39	0.497 67	1.69	0.496 94	1.54	0.497 29	1.61
	μ_h	0.571 98	0.567 66	0.76	0.577 24	0.92	0.567 76	0.74
	μ_{D_0}	0.134 44	0.136 55	1.57	0.136 59	1.60	0.133 97	0.34
	μ_t	0.083 36	0.079 19	5.01	0.082 16	1.44	0.082 65	0.85
	μ_K	0.064 37	0.066 49	3.29	0.062 63	2.70	0.065 65	1.98

$\mu_t > \mu_K$,因此,需要增加对分布参数μ_h,μ_d的不确定性的关注度以降低输出方差的变异性。此外,分布参数对输出均值和方差的 2 种重要性测度指标的排序并不相同,这说明影响输出不同特征的主要参数一般是不同的,在实际工程中需要根据所关心的输出特征有针对性地选择合适的重要性测度指标。

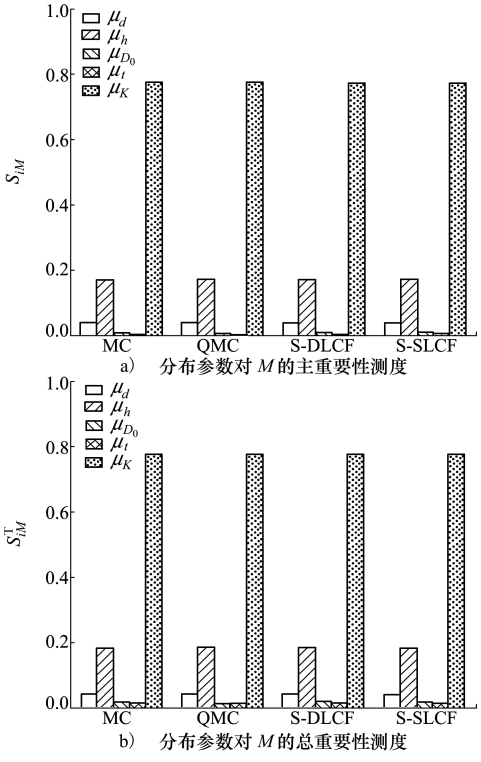


图 2 算例 3.2 在不同方法下计算得出的输出均值重要性测度对比图

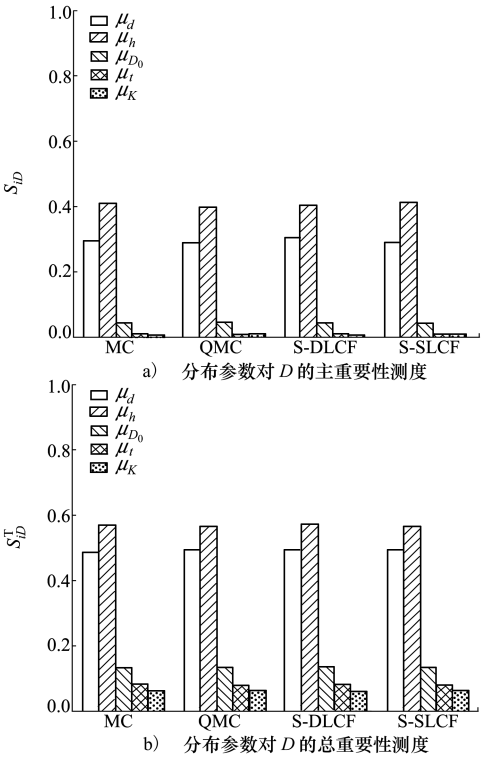


图 3 算例 3.2 在不同方法下计算得出的输出方差重要性测度对比图

4 结 论

本文研究了分布参数具有不确定性时的重要性分析问题,首先定义了衡量分布参数不确定性对输出均值和方差影响的重要性测度指标。其次,针对传统 MC 方法在进行参数重要性分析时计算量大、工程难以接受的缺点,以求积公式为基础,结合 SSPDF,提出了参数不确定性重要性测度求解的两种新算法,大大降低了参数不确定性重要性分析的成本。

所提新算法的效率和精度取决于两方面:一方面是 CF 的选择,另一方面是 SSPDF 的选取。对于 CF 的选择,依赖于问题的维数,本文选择的是求积公式Ⅲ,该公式在求解低等到中等维度的问题时有较好的精度及效率;对于 SSPDF 的选取,一个合适的 SSPDF 应该覆盖分布参数确定的输入变量的整个变化范围,本文采用了与原输入变量具有相同分布的方法确定 SSPDF。

通过数值算例和工程算例的分析结果可以得出,所提的新算法在求解主重要性测度和总重要性测度时都体现出了较高的精度,并能准确对分布参数的重要性进行排序。与 QMC 方法比较,2 种新算法在大幅度减少计算量的同时表现出了更优的计算精度;而 S-DLCF 与 S-SLCF 相比,S-DLCF 所得结果的相对误差更小,计算结果更有效;而 S-SLCF 通过引入准蒙特卡洛法,真正意义上将求解分布参数不确定性下的重要性测度指标时的 3 层 MC 抽样方法简化为单层抽样,计算过程更加简洁。在工程实际中,可以根据具体的问题选择不同的算法。

参考文献:

[1] YUN W Y, LU Z Z, HE P F, et al. An efficient method for estimating the parameter global reliability sensitivity analysis by innovative single-loop process and embedded Kriging model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 133: 106288

[2] GUO J, DU X P. Sensitivity analysis with mixture of epistemic and aleatory uncertainties[J]. AIAA Journal, 2007, 45(9): 2337-2349

[3] TORII A J, NOVOTNY A A. A priori error estimates for local reliability-based sensitivity analysis with Monte Carlo simulation [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2021, 213(3): 107749

[4] LI L Y, LU Z Z. Regional importance effect analysis of the input variables on failure probability[J]. Computers & Structures, 2013, 125: 74-85

[5] SALTELLI A. Sensitivity analysis for importance assessment[J]. Risk Analysis, 2002, 22(3): 579-590

[6] SOBOL I M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models[J]. Mathematical and Computer Modelling, 1993, 1(4): 407-414

[7] BORGONOVO E. A new uncertainty importance measure[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2007, 92(6): 771-784

[8] HAO W R, LU Z Z, LI L Y. A new interpretation and validation of variance based importance measures for models with correlated inputs[J]. Computer Physics Communications, 2013, 184(5): 1401-1413

[9] 锁斌, 曾超, 程永生, 等. 认知不确定性下可靠性灵敏度分析的新指标[J]. 航空学报, 2013, 34(7): 1605-1615
SUO Bin, ZENG Chao, CHENG Yongsheng, et al. New index for reliability sensitivity analysis under epistemic uncertainty[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2013, 34(7): 1605-1615 (in Chinese)

[10] WANG L, XIONG C, WANG X, et al. A dimension-wise method and its improvement for multidisciplinary interval uncertainty analysis[J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 59: 680-695

[11] PEREZ-CANEDO B, CONCEPCION-MORALES E R. A method to find the unique optimal fuzzy value of fully fuzzy linear programming problems with inequality constraints having unrestricted L-R fuzzy parameters and decision variables[J]. Expert Systems with Applications, 2019, 123: 256-269

[12] SANKARARAMAN S, MAHADEVAN S. Separating the contributions of variability and parameter uncertainty in probability distributions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2013, 112: 187-199

[13] LI L Y, LU Z Z. A new algorithm for importance analysis of the inputs with distribution parameter uncertainty[J]. International Journal of Systems Science, 2016, 47(13): 3065-3077

[14] LI L Y, LU Z Z, FENG J, et al. Moment-independent importance measure of basic variable and its state dependent parameter solution[J]. Structural Safety, 2012, 38: 40-47

[15] WANG P, LU Z Z, TANG Z C. An application of the Kriging method in global sensitivity analysis with parameter uncertainty [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(9): 6543-6555

[16] LU J, DARMOFAL D L. Higher-dimensional integration with Gaussian weight for applications in probabilistic design[J]. Siam Journal on Scientific Computing, 2004, 26(2): 613-624

[17] HUANG X Z, LI Y X, ZHANG Y M, et al. A new direct second-order reliability analysis method [J]. Applied Mathematical Modelling, 2018, 55: 68-80

[18] XU J, LU Z H. Evaluation of moments of performance functions based on efficient cubature formulation[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2017, 143(8): 06017007

[19] LIU Y S, LI L Y, ZHOU C C, et al. Efficient multivariate sensitivity analysis for dynamic models based on cubature formula[J]. Engineering Structures, 2020, 206: 110164

[20] ZHANG X B, LU Z H, CHENG K, et al. A novel reliability sensitivity analysis method based on directional sampling and Monte Carlo simulation[J]. Journal of Risk and Reliability, 2020, 234(4): 622-635

Efficient importance analysis methods for structures with distribution parameter uncertainty based on cubature formula

LIU Junchao, LI Luyi

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The importance analysis of a structural system with distribution parameter uncertainty can identify key parameters that significantly affect its output performance, thus providing importance guidance for its design and optimization. However, the traditional importance analysis method requires the three-loop Monte Carlo sampling to estimate the importance measurement index of a distribution parameter with such output characteristic values as mean and variance, whose computational cost is too large. To solve this problem, two efficient cubature formula methods based on the surrogate sampling probability density function (SSPDF) for the importance analysis of distribution parameters are proposed: ①the double-loop cubature formula based on the surrogate sampling probability density function (S-DLCF); ②the single-loop cubature formula based on the surrogate sampling probability density function (S-SLCF). The two methods use cubature formulas to efficiently compute the nested mean and variance in the importance measurement index of a distribution parameter, thus solving the problem that the computational effort of propagating parameter uncertainty to output characteristic values depends on parameter dimensionality because of SSPDF. The S-DLCF makes full use of the efficiency and accuracy of the cubature formula to estimate output statistical moments; the S-SLCF simplifies the integral to calculate output moments by expanding the dimensionality of the distribution parameter. The numerical and engineering examples verify the efficiency and accuracy of the two methods for the importance analysis of distribution parameters.

Keywords: distribution parameter uncertainty; importance analysis; surrogate sampling probability density function; cubature formula; single-loop Monte Carlo sampling

引用格式: *刘俊超, 李璐祎. 分布参数不确定性重要性分析的高效求积公式法[J]. 西北工业大学学报, 2022, 40(6): 1212-1222*

LIU Junchao, LI Luyi. Efficient importance analysis methods for structures with distribution parameter uncertainty based on cubature formula[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2022, 40(6): 1212-1222 (in Chinese)

© 2022 Journal of Northwestern Polytechnical University.

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.