

# 考虑弯扭耦合效应的复合材料叶片铺层优化方法

张龙<sup>1</sup>, 贾普荣<sup>1</sup>, 王波<sup>2</sup>, 徐斌<sup>1</sup>

(1.西北工业大学 力学与土木建筑学院, 陕西 西安 710072; 2.西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

**摘要:**在复合材料叶片设计中,可利用弯扭耦合效应进行铺层优化设计,通过减小叶片气动弹性外形的改变来提高叶片结构的效率。将复合材料叶片简化为对称非均衡悬臂层合板,基于经典层合板理论提出刚度权值和载荷系数2个分析参数。并采用试验和有限元模拟分析了弯扭耦合效应中分析参数对结构变形的影响。进一步以刚度权值的可行域为约束条件,叶片曲率最小为目标函数,对含有 $0^\circ$ ,  $90^\circ$ 和 $\pm 45^\circ$ 铺层的对称层合板进行分析计算,得到关于载荷系数的刚度权值最优路径。并以16层对称层合板为例进行了验证计算。通过对刚度权值最优路径的逆向计算,能够快速得到满足设计条件的最优铺层顺序。该方法可为复合材料叶片的铺层优化设计提供一定的参考和依据。

**关键词:**复合材料;对称非均衡;弯扭耦合效应;铺层设计

**中图分类号:** TB332

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1000-2758(2018)06-1093-09

风扇叶片是航空发动机、船用推进器以及风力发电机的重要组成部分<sup>[1-3]</sup>。传统风扇叶片是由金属材料制成,但对于发动机而言,减轻结构重量能有效提高发动机的性能,因此为满足日益增长的这一需求,采用复合材料替换传统金属材料是一种有效且可行的途径<sup>[4-5]</sup>。相比于金属材料,复合材料具有质量轻、比模量高、比强度高、耐腐蚀、耐疲劳以及抗振动等优点。同时复合材料具有各向异性这一特点,在受载时会产生拉伸、剪切、弯曲和扭转之间互相的耦合效应,这使得复合材料结构设计具有更多灵活性,但也使设计更加复杂<sup>[6]</sup>。

由于传统金属叶片模量高,受载时叶片变形较小,因此在设计过程中一般忽略叶片气动外形的变化对结构性能的影响<sup>[7]</sup>。然而复合材料叶片的变形较大,并且不同铺层方案的变形差异也较大,过大的变形会导致叶片不再满足气动弹性外形的设计,进而导致叶片结构效率下降。因此在铺层设计时必须考虑变形对叶片气动弹性结构效率的影响<sup>[8]</sup>。周邢银等人对复合材料悬臂梁不同区域上的弯扭耦合效应对结构变形的影响进行了研究<sup>[9]</sup>。彭峰和Xiao等人分别对船用复合材料叶片和发动机叶片进行了研究,结果表明铺层角度、铺层厚度、铺层顺

序对复合材料叶片结构的性能有显著影响<sup>[10-11]</sup>。Abdul等人通过不同铺层顺序的试验与仿真研究表明铺层顺序对叶片结构变形的影响很大<sup>[12]</sup>。同时相比于弯曲变形,叶片的扭转变形会改变叶片的攻角,而攻角的改变会显著降低叶片结构的效率<sup>[13]</sup>。为了提高叶片结构效率,必须减小叶片气动外形的改变,尤其是减小扭转变形。因此可以利用复合材料对称层合板结构中的弯扭耦合效应,通过调整铺层角度和铺层顺序,使结构中由弯矩通过耦合效应产生的扭转变形,与扭矩产生的扭转变形相互抵消,减小叶片的整体扭转变形,从而提高叶片气动弹性结构的效率<sup>[14-15]</sup>,达到铺层优化设计的目的。

本文基于经典层合板理论,提出了2个分析参数:刚度权值和载荷系数。通过设计弯扭耦合试验,研究了2个分析参数对弯扭耦合效应的影响,并结合有限元模拟对试验数据与理论结果进行了对比验证。进一步采用刚度权值和载荷系数对弯扭耦合效应进行了定量分析,将求解满足最小曲率目标函数时的最优铺层顺序转化为求解最优刚度权值,得到随载荷系数变化的最优刚度权值曲线。在给定任意弯扭载荷系数下,通过对最优刚度权值曲线的逆向计算,能够直接得到满足结构设计条件的最优铺层

顺序,为复合材料叶片的铺层优化设计提供了参考和依据。

### 1 刚度权值和载荷系数的定义

#### 1.1 刚度权值

为了分析对称层合板结构中相同铺层角度所在铺层位置对弯扭耦合效应的影响,基于经典层合板理论(CLT),将面内刚度矩阵  $A$  和弯曲刚度矩阵  $D$  中相同的铺层角度进行合并,刚度矩阵表述如下:

$$A = H \sum_{i=1}^r \bar{Q}^i \alpha_i$$

$$D = \frac{H^3}{12} \sum_{i=1}^r \bar{Q}^i \delta_i \tag{1}$$

式中,  $H$  为层合板总厚度,  $r$  为铺层角度种类的数量;  $i$  为铺层角度的编号,  $\bar{Q}^i$  为对应角度的偏轴刚度矩阵,  $\alpha_i$  和  $\delta_i$  分别为该角度的面内和弯曲刚度权值,由公式(2)给出:

$$\alpha_i = \frac{1}{H} \sum_{t=1}^{m_i} (h_{i,t} - h_{i,t-1})$$

$$\delta_i = \frac{4}{H^3} \sum_{t=1}^{m_i} (h_{i,t}^3 - h_{i,t-1}^3) \tag{2}$$

式中,  $m_i$  为第  $i$  个角度的铺层数量,  $h_{i,t}$  和  $h_{i,t-1}$  分别为该角度下第  $t$  层的上下表面的  $Z$  坐标值。根据公式(2)的定义,  $\alpha_i$  与铺层含量意义相同,且  $\alpha_i$  和  $\delta_i$  满足如下关系

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = \sum_{i=1}^r \delta_i = 1$$

$$\delta_i \in [\alpha_i^3, \alpha_i^3 - 3\alpha_i^2 + 3\alpha_i] \tag{3}$$

#### 1.2 载荷系数

为了分析不同载荷比例对耦合效应的影响,采用单位化对载荷进行变量代换,如公式(4)所示:

$$\bar{M} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{xy}^2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \omega_x\right) = M_x / \bar{M}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \omega_y\right) = M_y / \bar{M}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \omega_{xy}\right) = M_{xy} / \bar{M} \tag{4}$$

式中,  $\omega_i \in [0, 2]$ , ( $i = x, y, xy$ ) 为合内力矩比例系数,反映合内力矩的分量  $M_i$  与整体  $M$  的关系。 $\bar{M}$  为合内力矩幅值系数,反映合内力矩  $M$  的整体大小,由于  $\bar{M}$  与曲率  $\kappa$  整体幅度成线性关系,因此可取  $\bar{M}$

= 1,只对  $\omega$  进行讨论。

由此分别引入了体现铺层因素的分析变量:刚度权值  $\alpha$  和  $\delta$ ,以及体现载荷因素的分析变量:比例系数  $\omega$ 。

### 2 试验与有限元模拟分析研究

#### 2.1 弯扭耦合试验方案

图 1 为弯扭耦合试验加载方式示意图。图 2 为复合材料试件尺寸示意图。如图所示,通过在复合材料悬臂板加载端 5 个不同位置施加载荷分别为  $L_{N2}, L_{N1}, P_0, L_{P1}$  和  $L_{P2}$ 。实现扭矩由负到正的 5 种弯扭载荷比例,试验采用 Instron1196 电子万能试验机加载,试验速度为 2 mm/min,当载荷达到 60 N 时,结束试验,保存数据。层合板选用 M40J/CYCOM970 高模量碳纤维复合材料,单层厚度 0.125 mm,其单层属性见表 1。

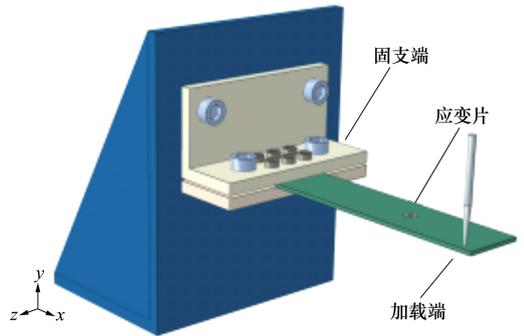


图 1 试验加载方式示意图

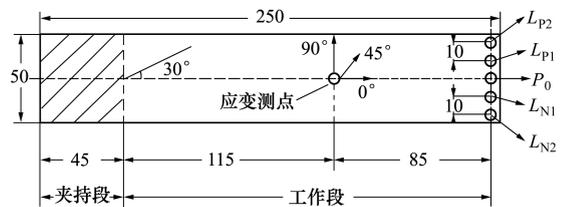


图 2 复合材料试件尺寸示意图(单位: mm)

表 1 M40J/CYCOM970 复合材料单层基本性能

$E_{11}/$ GPa	$E_{22}=E_{33}/$ GPa	$\nu_{12}=\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$G_{12}=G_{13}/$ GPa	$G_{23}/$ GPa
179.11	11.32	0.254	0.45	5.26	2.76

表 2 为 4 种试件铺层顺序和对应铺层角度的

$\delta$ 。通过改变试件铺层顺序,实现  $\delta$  的变化。在设计试件偏轴铺层角度时,为提高试验数据的可分析性,即在改变  $\omega$  和  $\delta$  时,提高曲率和扭率的变化量,应选择耦合效应较强的偏轴角度,同时考虑偏轴角度铺设的难易,偏轴角度以整数为宜,最终根据本文所用复合材料属性,选择  $30^\circ$  作为偏轴铺层角度。

表 2 试件铺层顺序和弯曲刚度权值  $\delta$

编号	铺层顺序	弯曲刚度权值(单位:1)			
		$\delta_0$	$\delta_{-30}$	$\delta_{30}$	$\delta_{30}-\delta_{-30}$
A 型	$[30_2/-30_2/30_2/0_2]_s$	0.016	0.297	0.687	0.390
B 型	$[30_2/0_2/30_2/-30_2]_s$	0.297	0.016	0.687	0.671
C 型	$[-30_2/30_2/0_2/30_2]_s$	0.109	0.578	0.313	-0.265
D 型	$[0_2/30_2/-30_2/30_2]_s$	0.578	0.109	0.313	0.204

2.2 有限元分析模型

由于试验只能通过计算应变得到测点曲率,无法测得内力矩,因此不能直接对 CLT 理论进行计算验证。通过引入有限元(FEA)仿真计算,可以同时得到测点曲率和内力矩。通过对比试验与 FEA 的曲率数据,验证 FEA 的计算结果的正确性。再将试验曲率通过 CLT 理论计算得到的内力矩与 FEA 的内力矩进行对比分析,并以此来验证采用 CLT 理论对弯扭耦合效应进行分析计算是否可行。

本文采用 ABAQUS 商业有限元件对试验进行仿真模拟。模型尺寸和加载方式与图 2、图 1 一致,材料属性和铺层顺序与表 1、表 2 一致,采用 C3D20 单元,单元数为 720 000。模型边界条件及加载方式

如表 3 所示,均与试验条件尽可能保持一致。

表 3 有限元模型边界条件及加载方式

约束位置	约束方式
夹持段底面	$U_3 = 0$
加持段上表面螺钉位置	$U_1 = U_2 = U_3 = 0$
加载点( $L_{N2}, L_{N1}, P_0, L_{P1}, L_{P2}$ )	$F_3 = -60/N$

2.3 试验与有限元结果对比分析

图 3 为 4 种试件试验和 FEA 的曲率  $\kappa$ -加载点曲线。结合表 2 中的权值与图中曲线可以看出:

1) 对比 4 种试件在  $P_0$  纯弯曲加载时,随  $\delta_0$  增大,  $|\kappa_x|$  和  $|\kappa_y|$  减小;随  $|\delta_{30} - \delta_{-30}|$  增大,  $|\kappa_{xy}|$  增大;在  $\delta_{30} - \delta_{-30} > 0$  的 ABD 型中  $\kappa_{xy} < 0$ ,反之在  $\delta_{30} - \delta_{-30} < 0$  的 C 型中  $\kappa_{xy} > 0$ 。

2) 在  $\delta_{30} - \delta_{-30} > 0$  的 ABD 型中,随  $M_{xy}$  增大  $\kappa_x$  减小,反之在  $\delta_{30} - \delta_{-30} < 0$  的 C 型中  $\kappa_x$  增大,随  $|\delta_{30} - \delta_{-30}|$  增大,  $\kappa_x$  和  $\kappa_{xy}$  的斜率增大。

3) 对应 5 种不同弯扭载荷比例时,  $|\kappa_{xy}|$  最小值对应不同的铺层顺序。A 型和 B 型  $|\kappa_{xy}|$  最小值对应在  $L_{P2}$  加载点,其中 A 型  $|\kappa_{xy}|$  更小, C 型和 D 型  $|\kappa_{xy}|$  最小值分别对应  $L_{N1}$  和  $L_{P1}$  加载点。

从以上分析可以发现,① $\delta_0$  控制抗弯曲性能;②  $|\delta_{30} - \delta_{-30}|$  的大小控制耦合效应的强弱,  $\delta_{30} - \delta_{-30}$  的正负控制耦合效应的正负。③ 在不同弯扭载荷比例下,最小  $|\kappa_{xy}|$  对应的铺层也不相同。由此可将非连续的铺层顺序转化为连续的刚度权值,对复合材料弯扭耦合效应进行定量分析和研究。

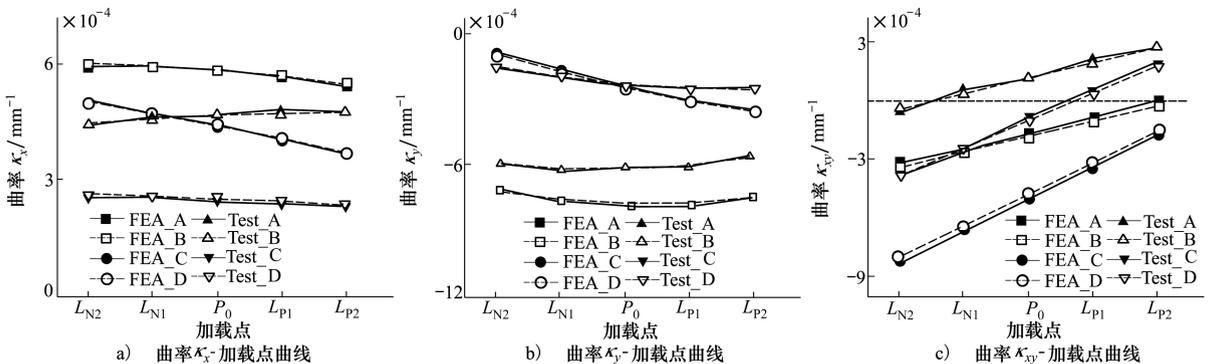


图 3 4 种试件试验和有限元的曲率  $\kappa$ -加载点曲线

图 4 为 4 种试件试验和 FEA 的力矩  $M$  - 加载点曲线,其中试验的合内力矩  $M$  是由试验的曲率数据通过 CLT 理论计算得到的。从图中可以看出 4 种

试件的受力情况基本一致。对 4 种试件的  $M$  求平均并计算得到平均  $\omega$ ,如表 4 所示。结合表 4 可以看出,在 5 种加载方式下:① $M_x$  数值最大,且大小基本

相同;② $M_y$  数值很小,几乎为 0;③ 在  $P_0$  加载点下, 至  $L_{P2}$ ,  $M_{xy}$  由负变正。力矩  $M_{xy}$  几乎为 0, 基本为纯弯曲状态;加载点由  $L_{N2}$

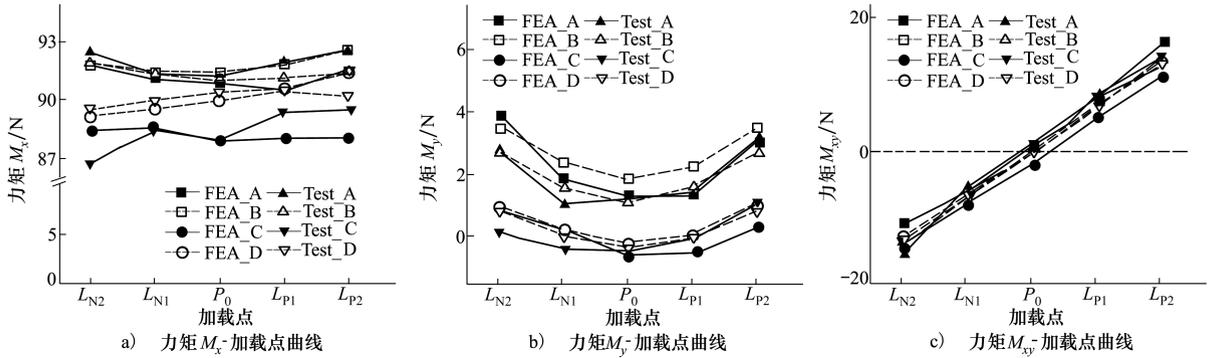


图 4 4 种试件试验和有限元的力矩  $M$ -加载点曲线

表 4 试验与 FEA 的 5 种加载方式的平均载荷因子

Test/FEA	$\omega_x$	$\omega_y$	$\omega_{xy}$
$L_{N2}$	0.094/0.092	0.987/0.986	1.093/1.091
$L_{N1}$	0.045/0.046	0.995/0.993	1.045/1.046
$P_0$	0.002/0.004	0.997/0.996	1.000/1.000
$L_{P1}$	0.050/0.048	0.996/0.994	0.950/0.952
$L_{P2}$	0.096/0.094	0.987/0.986	0.905/0.906

为比较试验和 FEA 2 组曲线的的数据误差,采用积分绝对值误差准则 (IAE) 对数据进行分析,计算方法如公式(5)所示,式中  $D_{Test}$  表示试验数据,  $D_{FEA}$  表示有限元数据,  $n$  为数据的数量。误差计算结果如表 5 所示。

$$E_{IAE} = \frac{\sum_{i=1}^n |D_{Test_i} - D_{FEA_i}|}{\sum_{i=1}^n |D_{FEA_i}|} \quad (5)$$

表 5 试验和 FEA 的曲率  $\kappa$  和力矩  $M$  的误差 %

类型	A 型	B 型	C 型	D 型
$\kappa_x$	0.69	0.54	0.69	1.87
$\kappa_y$	1.41	3.41	1.10	2.02
$\kappa_{xy}$	9.27	4.68	9.10	6.73
$M_x$	0.76	2.11	0.57	1.90
$M_y$	20.20	76.09	14.91	75.28
$M_{xy}$	16.30	18.31	12.96	8.10

差较小,  $\kappa_{xy}$  误差相对较大,这可能是由于  $\kappa_{xy}$  是通过应变转轴公式计算得到,误差被进一步放大。表 5 中试验和 FEA 的  $M_x$  和  $M_{xy}$  误差相对较小,  $M_y$  的误差很大,但从图 4b) 中可以看出  $M_y$  基本接近 0,因此数据差异可能不大,但得到的误差会较大。通过误差分析可以看出,试验与 FEA 的曲率数据基本一致,并且通过 CLT 理论计算得到的力矩与有限元仿真计算得到的力矩也相对一致。因此间接通过 FEA 模拟对 CLT 理论与试验数据进行了验证,可认为采用 CLT 理论对弯扭耦合效应的分析是可行的。

### 3 弯曲刚度权值的最优路径研究

#### 3.1 问题描述

本文以工程中常用的由  $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$  组成的对称层合板为例,以优先满足  $\min(|\kappa_{xy}|)$ , 其次满足  $\min(|\kappa_x|)$  为目标函数,进一步定量研究在不同  $\omega$  下,  $\delta$  的比例关系。由公式(1)可得层合板弯曲刚度矩阵如下

$$D = \frac{H^3}{12} \sum (Q^{\theta} \delta_{\theta}), \theta = 0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ \quad (6)$$

式中,  $Q^i$  为  $i = 0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$  时单层板的偏轴刚度矩阵。根据试验分析结果,取  $M_y = 0$  对问题进行简化,由公式(4)可得公式(7),独立载荷因子剩下  $\omega_x$ , 简记为  $\omega$ 。

$$\bar{M} = \sqrt{M_x^2 + M_{xy}^2}$$

$$M_x = \bar{M} \cos\left(\frac{\pi}{2} \omega\right)$$

从表 5 中可以看出,试验与 FEA 的  $\kappa_x$  和  $\kappa_y$  误

$$M_{xy} = \bar{M} \sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) \quad (7)$$

当铺层角度确定后,  $\kappa_x$  和  $\kappa_{xy}$  分别是关于  $\delta$  和  $\omega$  的函数。根据对称性分析可知, 将  $\omega$  最优铺层中的  $\pm\theta^\circ$  层的角度互换可得  $-\omega$  的最优铺层。因此在公式(7)中只需讨论  $\omega \in [0, 1]$  的情况。

为满足最小的  $|\kappa_x|$  和  $|\kappa_{xy}|$  条件, 须满足  $\delta_{-45}$  取值最小, 根据层合板铺层含量的约束, 假设满足  $\alpha_0 \geq 0.6$ , 其余铺层角度含量  $\alpha \geq 0.1$  时, 根据公式(3)中条件, 4 个  $\delta$  中只有 3 个相互独立, 此时权值可行域满足如下关系:

$$\begin{aligned} \delta_{-45} &= 0.001 \\ 0.511 &\leq \delta_0 + \delta_{90} \leq 0.998 \\ 0.216 &\leq \delta_0 \leq 0.973 \\ 0.001 &\leq \delta_{90} \leq 0.488 \end{aligned} \quad (8)$$

根据公式(8)可知,  $\delta$  的可行域如图 5 所示, 其中可行域边界点的权值坐标如表 6 所示。

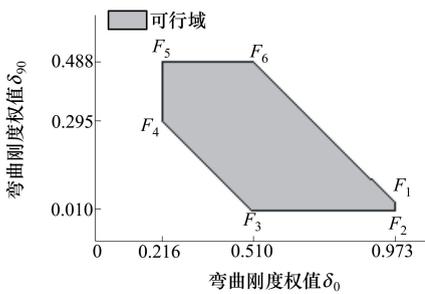


图 5 权值  $\delta$  的可行域

表 6 可行域边界点对应的权值  $\delta$  坐标

可行域边界点	权值 $\delta$ 坐标	
	$\delta_0$	$\delta_{90}$
$F_1$	0.973	0.025
$F_2$	0.973	0.001
$F_3$	0.510	0.001
$F_4$	0.216	0.295
$F_5$	0.216	0.488
$F_6$	0.510	0.488

### 3.2 权值最优路径的求解计算

本文采用 Maple 数学工程计算软件对所需求解的方程进行计算。令  $H^3/12 = 1$ , 对公式(6)进行简化, 由此可得  $\kappa_x$  和  $\kappa_{xy}$  分别是关于  $\delta$  和  $\omega$  的函数

$\kappa_x(\delta_0, \delta_{90}, \omega)$  和  $\kappa_{xy}(\delta_0, \delta_{90}, \omega)$ 。令  $\kappa_{xy} = 0$  可得不同  $\omega$  下  $\delta$  关于  $\kappa_{xy} = 0$  的等高曲线方程, 如公式(9)所示

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) d_{13}(\delta_0, \delta_{90}) + \\ &\sin\left(\frac{\pi}{2}\omega\right) d_{33}(\delta_0, \delta_{90}) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

根据公式(9)作图可得等高曲线  $\delta_{90} - \delta_0$ , 如图 6 所示。从图中可以看出,  $\omega$  存在一个临界值  $\omega^1$ : 当  $\omega \in [0, \omega^1]$  时, 存在等高曲线  $\delta_{90} - \delta_0$  使得  $\kappa_{xy} = 0$ , 当  $\omega = \omega^1$  时, 等高曲线  $\delta_{90} - \delta_0$  与可行域相交于点  $F_4$ ; 将点  $F_4$  的权值带入公式(9)可得  $\omega^1 = 0.144$ ; 当  $\omega \in [\omega^1, 1]$  时,  $\kappa_{xy}$  恒大于 0。

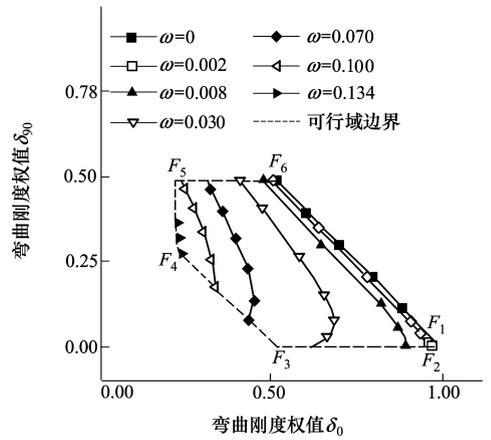


图 6 不同  $\omega$  下可行域上  $\kappa_{xy} = 0$  的  $\delta$  等高曲线  $\delta_{90} - \delta_0$

1) 当  $\omega \in [0, \omega^1]$  时:

求解公式(9)分别可得  $\delta_{90}$  和  $\delta_0$  的函数表达式:

$$\delta_{90} |_{\kappa_{xy}=0} = f(\delta_0, \omega), \omega \in [0, \omega^1] \quad (10)$$

$$\delta_0 |_{\kappa_{xy}=0} = g(\delta_{90}, \omega), \omega \in [0, \omega^1] \quad (11)$$

将公式(10)带入  $\kappa_x(\delta_0, \delta_{90}, \omega)$  可得:

$$\kappa_x |_{\kappa_{xy}=0} = \kappa_x(\delta_0, f(\delta_0, \omega), \omega), \omega \in [0, \omega^1] \quad (12)$$

根据公式(12)可得在满足  $\kappa_{xy} = 0$  的条件下,  $\kappa_x - \delta_0$  关于  $\omega$  的曲线族, 如图 7 所示。结合图 6 与图 7 可知, 当  $\omega \in [0, \omega^1]$  时, 部分等高曲线关于  $\delta_0$  分为上下 2 个部分, 部分等高曲线只有上半部分。且  $\delta_0$  取最大值时  $\kappa_x$  取得最小值。

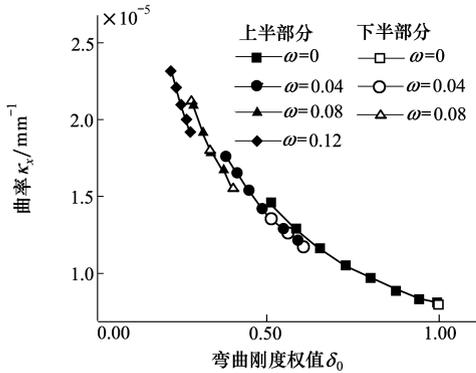


图 7 不同 ω 下 κ<sub>xy</sub> = 0 时的 κ<sub>x</sub> - δ<sub>0</sub> 曲线

为求得等高曲线上 δ<sub>0</sub> 的最大值,对图 6 进行分析可以看出,受可行域的约束,随 ω 增大,等高曲线上 δ<sub>0</sub> 的最大值被分为 3 个部分,分别在可行域边界 F<sub>1</sub>F<sub>2</sub>F<sub>3</sub>,可行域内和可行域边界 F<sub>3</sub>F<sub>4</sub> 上。令方程 (11) 关于 δ<sub>90</sub> 求导为 0,如公式 (13) 所示:

$$\frac{\delta_0 |_{\kappa_{xy}=0}}{\partial \delta_{90}} = \frac{\partial g(\delta_{90}, \omega)}{\partial \delta_{90}} = 0, \omega \in [0, \omega^1] \quad (13)$$

将方程 (13) 带入方程 (11) 并分别与 F<sub>2</sub>F<sub>3</sub> 和 F<sub>3</sub>F<sub>4</sub> 曲线方程联立求解,可得对应临界的 ω 分别为 0.002 和 0.008。

分别对 ω ∈ [0, 0.008], [0.008, 0.1] 和 [0.1, ω<sup>1</sup>] 3 个区间求解 δ<sub>0</sub> 的最大值,可得 δ<sub>0</sub>(ω) 函数方程。进一步带入公式 (11) 可得 δ<sub>90</sub>(ω) 函数方程,再根据公式 (3) 可得 δ<sub>45</sub>(ω) 函数方程。通过以上计算可得 ω ∈ [0, ω<sup>1</sup>] 时,满足 κ<sub>xy</sub> = 0,且 κ<sub>x</sub> 最小条件时,δ(ω) 的最优路径。

2) 当 ω ∈ [ω<sup>1</sup>, 1] 时:

κ<sub>xy</sub> 恒大于 0,根据图 6 可以看出,当 ω = ω<sup>1</sup> 时,κ<sub>xy</sub> 最小值在点 F<sub>4</sub>。过点 F<sub>4</sub> 的 κ<sub>xy</sub> 等高曲线方程如公式 (14) 所示

$$\kappa_{xy}(\delta_0, \delta_{90}, \omega) = \kappa_{xy} |_{\delta=F_4}, \omega \in [\omega^1, 1] \quad (14)$$

根据公式 (14) 可得不同 ω 下过边界点 F<sub>4</sub> 的 κ<sub>xy</sub> 等高曲线族,如图 8 所示。从图中可以看出,存在一个临界值 ω<sup>2</sup>,当 ω ∈ [ω<sup>1</sup>, ω<sup>2</sup>] 时,κ<sub>xy</sub> 最小值取在点 F<sub>4</sub> 处,当 ω ∈ [ω<sup>2</sup>, 1] 时,κ<sub>xy</sub> 最小值由点 F<sub>4</sub> 沿可行域边界向 F<sub>3</sub> 移动。

将公式 (8) 中可行域边界 F<sub>3</sub>F<sub>4</sub> 带入 κ<sub>xy</sub>,并令 κ<sub>xy</sub> 关于 δ<sub>0</sub> 求导为 0,如公式 (15) 所示

$$\frac{\partial \kappa_{xy}(\delta_0, 0.511 - \delta_0, \omega)}{\partial \delta_0} = 0, \omega \in [\omega^2, 1] \quad (15)$$

将点 F<sub>4</sub> 的 δ<sub>0</sub> 带入公式 (15) 求解可得临界值 ω<sup>2</sup>

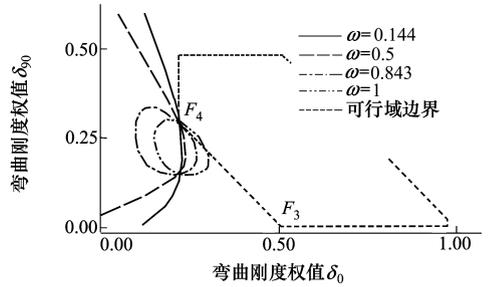


图 8 不同 ω 下过边界点 F<sub>4</sub> 的 κ<sub>xy</sub> 等高曲线族

= 0.843。对公式 (15) 求解可得 ω ∈ [ω<sup>2</sup>, 1] 范围内 κ<sub>xy</sub> 最小值的 δ<sub>0</sub>(ω) 函数方程,带入公式 (8) 中可行域边界 F<sub>3</sub>F<sub>4</sub> 可得 δ<sub>90</sub>(ω) 函数方程,进一步可得 δ<sub>45</sub>(ω) 函数方程。

### 3.3 权值最优路径计算结果与分析

通过以上分析可得,在可行域约束下的 δ 最优路径,如图 9 所示。

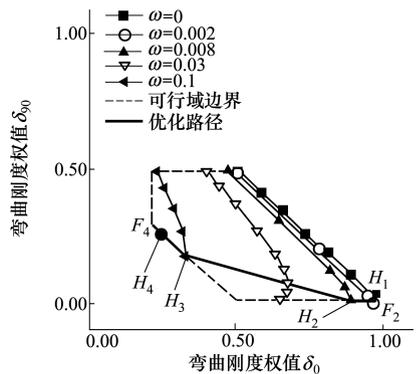


图 9 不同比例系数 ω 下可行域内权值 δ 的最优路径

图中虚线为可行域边界带有形状符号的曲线为对应不同 ω 时 κ<sub>xy</sub> = 0 的等高曲线,实曲线 H<sub>1</sub>F<sub>2</sub>H<sub>2</sub>H<sub>3</sub>F<sub>4</sub>H<sub>4</sub> 为整体 δ 最优路径 δ<sub>90</sub> - δ<sub>0</sub> 曲线。在该最优路径上,能够优先保证 |κ<sub>xy</sub>| 最小,其次保证 |κ<sub>x</sub>| 最小。由于受可行域边界的约束,δ 最优路径被分为 6 个部分。当 ω ∈ [0.008, 0.1] 时,最优路径在可行域内的曲线 H<sub>2</sub>H<sub>3</sub> 上,当 ω 不在该范围时,最优路径在可行域的边界上。δ 最优路径的拐点坐标与对应的 ω 如表 7 所示。

通过 δ 最优路径,可得 δ(ω) 曲线,如图 10 所示。结合表 7 与图 10 可以看出:

表 7 权值  $\delta$  最优路径拐点坐标与对应比例系数  $\omega$

最优路径拐点	比例系数 $\omega$	权值 $\delta$ 坐标	
		$\delta_0$	$\delta_{90}$
$H_1$	0	0.973	0.024
$F_2$	0.002	0.973	0.001
$H_2$	0.008	0.902	0.001
$H_3$	0.100	0.333	0.178
$F_4$	0.144/0.843	0.216	0.295
$H_4$	1	0.255	0.255

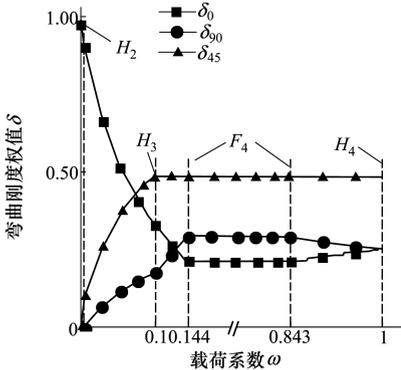


图 10 可行域上最优权值路径的  $\delta - \omega$  曲线

小,  $\delta_{45}$  保持不变,  $\delta$  最优路径由点  $F_4$  沿可行域边界向  $H_4$  移动。

通过最优路径  $\delta(\omega)$ , 可以计算得到在最优路径上  $\kappa - \omega$  曲线, 如图 11 所示。从图中可以看出, 在最优路径  $\delta(\omega)$  上:

1) 当  $\omega \in [0, \omega^1]$  时, 通过改变  $\delta$  可以保证, 随  $\omega$  增大,  $\kappa_{xy} = 0, \kappa_x$  取得最小值。

2) 当  $\omega \in [\omega^1, 1]$  时, 随  $\omega$  增大,  $\kappa_{xy}$  开始增大,  $\kappa_x$  开始减小。

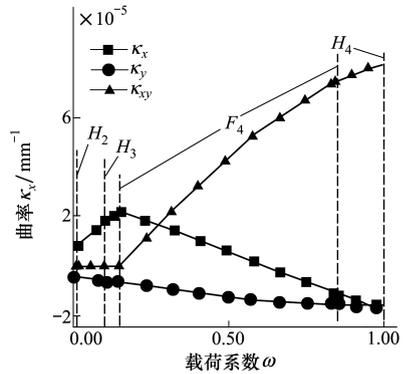


图 11 可行域上最优权值路径的  $\kappa - \omega$  曲线

1) 当  $\omega \in [0, 0.002]$  时, 随  $\omega$  增大,  $\delta_0$  不变,  $\delta_{90}$  减小,  $\delta_{45}$  增大。  $\delta$  最优路径为可行域边界  $H_1 F_1$ 。

2) 当  $\omega \in [0.002, 0.008]$  时, 随  $\omega$  增大,  $\delta_0$  减小,  $\delta_{90}$  不变,  $\delta_{45}$  增大。  $\delta$  最优路径为可行域边界  $F_1 H_2$ 。

3) 当  $\omega \in [0.008, \omega^1]$  时, 随  $\omega$  增大  $\delta_0$  减小,  $\delta_{90}$  和  $\delta_{45}$  增大, 且  $\delta_{45}$  增幅大于  $\delta_{90}$ 。以  $\omega = 0.1$  为分界,  $\delta$  最优路径分为 2 个部分: 可行域内的  $H_2 H_3$  和可行域边界上的  $H_3 F_4$ 。

4) 当  $\omega \in [\omega^1, \omega^2]$  时, 随  $\omega$  增大,  $\delta_0, \delta_{90}$  和  $\delta_{45}$  保持不变,  $\delta$  最优路径停留在可行域边界点  $F_4$  上。

5) 当  $\omega \in [\omega^2, 1]$  时, 随  $\omega$  增大,  $\delta_0$  增大,  $\delta_{90}$  减

### 3.4 权值最优路径的算例验证与讨论

本文以 16 层对称层合板为例, 对最优路径  $\delta(\omega)$  进行验证。以试验中 P0, LP1 和 LP2 3 种情况的载荷因子为基础, 分别选取  $\omega = 0, 0.05, 0.1$  以及  $\omega^1$  进行分析计算。根据铺层含量的约束关系可知 4 种角度的铺层数分别为  $0^\circ$  铺层有 10 层,  $90^\circ$  和  $\pm 45^\circ$  铺层各 2 层。

由于实际情况中  $\delta$  的取值是在三维空间中的离散点 ( $\delta_0, \delta_{90}, \delta_{45}$ ) 上, 不一定刚好取在理论最优  $\delta$  点上, 因此实际最优  $\delta$  点是离散的三维空间点中包围理论最优  $\delta$  点最小六面体 8 个顶点中的 1 个。通过计算实际与理论  $\delta$  最优点的距离可以计算得到六

表 8 对应比例系数  $\omega$  下权值  $\delta$ , 曲率  $\kappa$  的理论与实际最优解及铺层顺序

载荷系数 $\omega$	最优解	权值 ( $\delta_0, \delta_{90}, \delta_{-45}, \delta_{45}$ )	曲率 ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ )	实际铺层顺序
			(单位: $10^{-5} \text{mm}^{-1}$ )	
0	理论	(0.973, 0.024, 0.001, 0.002)	(0.82, -0.21, 0.00)	\
	实际	(0.947, 0.037, 0.002, 0.014)	(0.84, -0.20, 0.01)	$[0_5/90/45/-45]_s$
0.05	理论	(0.547, 0.111, 0.001, 0.341)	(0.84, 0.48, 0.00)	\
	实际	(0.549, 0.119, 0.002, 0.330)	(1.26, -0.460, 0.01)	$[45/0_2/90/0_3/-45]_s$
0.1	理论	(0.333, 0.178, 0.001, 0.488)	(1.73, -0.63, 0.00)	\
	实际	(0.420, 0.248, 0.002, 0.330)	(1.47, -0.45, 0.42)	$[45/90/0_5/-45]_s$
0.144	理论	(0.216, 0.295, 0.001, 0.488)	(2.18, -0.61, 0.00)	\
	实际	(0.244, 0.248, 0.178, 0.330)	(1.98, -0.69, 0.89)	$[45/90/-45/0_5]_s$

面体 8 个顶点的权值  $\delta$ , 从 8 种情况中选取满足最优条件的最优实际  $\delta$ , 即为所求最优实际最优解。

表 8 为采用 Maple 编程计算得到对应  $\omega$  的  $\delta$  和  $\kappa$  的理论、实际最优解, 及对应的实际铺层顺序。从表中可以看出, 最优解的理论与实际  $\delta$  和  $\kappa$  非常接近。① 当  $\omega = 0$  纯弯曲时,  $0^\circ$  层在最外层,  $\pm 45^\circ$  层在最内层; ② 随  $\omega$  增大,  $45^\circ$  层最先移动到外层,  $90^\circ$  和  $-45^\circ$  层相继向外层移动。当  $\omega = 0.05$  时,  $\delta_{45}$  的实际值为 0.330, 已经达到实际的最大值, 但仍小于  $\delta_{45}$  的理论值 0.341, 随  $\omega$  增大, 二者差异增大,  $\kappa_{xy}$  也开始增大。这是由于实际铺层的非连续性以及受到铺层含量的约束导致  $\delta$  的实际最优值不能完全与理论最优值重合。

### 4 结 论

本文基于经典层合板理论提出了 2 个分析参数: ① 将非量化的铺层顺序转化为可量化分析的刚度权值; ② 将合内力矩转化为归一化的载荷系数。并通过弯扭耦合试验与有限元模拟讨论了 2 个分析

参数对弯扭耦合效应的影响。

以弯曲刚度权值的可行域为约束条件, 结构曲率最小为目标函数, 对含有  $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$  的层合板进行了优化分析, 得到了弯曲刚度权值的最优路径。受到可行域的限制, 弯曲刚度权值最优路径被分成 6 个部分。① 在前 4 个部分中, 即  $\omega \in [0, \omega^1]$  时, 存在优化权值比例使得曲率  $\kappa_{xy} = 0, |\kappa_x|$  取得最小值。② 当  $\omega \in [\omega^1, 1]$  时, 受到可行域的限制, 在弯曲刚度权值最优路径上, 随  $\omega$  增大, 曲率  $\kappa_{xy}$  开始增大,  $\kappa_x$  开始减小。

根据本文提出的刚度权值最优路径, 在给定任意的弯扭载荷条件下, 可以得到对应的理论最优刚度权值, 经过逆向计算可以得到实际最优铺层顺序。通过该方法能够快速有效地找到满足曲率设计目标的最优铺层顺序, 能够对复合材料叶片弯扭耦合效应的优化设计提供一定的参考和依据。在本文的分析研究中, 将叶片模型简化假设为层合板, 忽略曲面叶形结构的影响, 因此在后续的工作中需要进一步研究在曲面叶形结构上弯扭耦合效应的优化分析。

### 参考文献:

- [1] Coroneos R M. Structural Analysis and Optimization of a Composite Fan Blade for Future Aircraft Engine [R]. NASA/TM-2012-217632
- [2] 张帅, 朱锡, 孙海涛, 等. 船用复合材料螺旋桨研究进展 [J]. 力学进展, 2012, 42(5): 620-633  
Zhang Shuai, Zhu Xi, Sun Haitao, et al. Review of Researches on Composite Marine Propellers [J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(5): 620-633 (in Chinese)
- [3] Chamis C C, Blankson I M. Exo-Skeletal Engine: Novel Engine Concept [R]. NASA/TM-2004-212621
- [4] Latife K, Galib A, Christos C C. Structural Evaluation of Exoskeletal Engine Fan Blades [R]. AIAA-2003-1861
- [5] Galib A, Christos C. Durability and Damage Tolerance Evaluation of a Composite Rotor for Advanced Engine Applications [R]. AIAA-2005-1834
- [6] Luczak M, Manzato S, Peeters B, et al. Experimental Verification of the Implementation of Bend-Twist Coupling in a Wind Turbine Blade [C] // Proceedings of European Wind Energy Association, 2011
- [7] Amoo L M. On the Design and Structural Analysis of Jet Engine Fan Blade Structures [J]. Progress in Aerospace Sciences, 2013, 60: 1-11
- [8] Young Y L. Dynamic Hydroelastic Scaling of Self-Adaptive Composite Marine Rotors [J]. Composite Structures, 2010, 92(1): 97-106
- [9] 周邢银, 安利强, 王璋奇. 对称非均匀层合板梁的弯扭耦合效应 [J]. 复合材料学报, 2017, 34(7): 1462-1468  
Zhou Xingyin, An Liqiang, Wang Zhangqi. Bend-twist Coupling Effect of Symmetric Un-Uniform Laminate Plate Beam [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2017, 34(7): 1462-1468 (in Chinese)
- [10] 彭峰. 铺层参数对碳纤维船用螺旋桨性能影响研究 [D]. 武汉: 武汉理工大学, 2014  
Peng Feng. The Study of Laying Parameters Influences on the Performance of Carbon Fiber Marine Propeller [D]. Wuhan, Wuhan University of Technology, 2014 (in Chinese)

- [11] Xiao J, Chen Y, Zhu Q, et al. A General Ply Design for Aero Engine Composite Fan Blade[C]//Proceedings of ASME Turbo Expo 2017: Turbomachinery Technical Conference and Exposition, 2017
- [12] Abdul M K, Daniel O A, Vinay D, et al. Effects of Bend-Twist Coupling on Composite Propeller Performance[J]. Mechanics of Composite Materials and Structures, 2010, 7(4): 383-401
- [13] Mark C. Design Limits of Bend Twist Coupled Wind Turbine Blades[R]. AIAA-2012-1501
- [14] Liu Z, Young Y L. Utilization of Bend-twist Coupling for Performance Enhancement of Composite Marine Propellers[J]. Journal of Fluids and Structures, 2009, 25(6): 1102-1116
- [15] Young Y L. Fluid-Structure Interaction Analysis of Flexible Composite Marine Propellers[J]. Journal of Fluids and Structures, 2008, 24(6): 799-818

## Optimization Method of Composite Blade Lay-up Considering Bent-Twist Coupling Effect

Zhang Long<sup>1</sup>, Jia Purong<sup>1</sup>, Wang Bo<sup>2</sup>, Xu Bin<sup>1</sup>

(1.School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; )  
(2.School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** In the design of composite blades, the bent-twist coupling effect can be used to reduce the aeroelastic deformation of the blades by lay-up optimization design to improve the efficiency of blade structure. In this paper, the composite blade was simplified as symmetric unbalanced cantilever laminate, and based on the classical laminated theory (CLT), two analysis parameters are proposed: the stiffness weights and load factors. The influence of the two analysis parameters on the structural deformation of the bent-twist coupling effect is studied by experiments and finite element analysis (FEA). The symmetrical laminated plates containing  $0^\circ$ ,  $90^\circ$  and  $\pm 45^\circ$  plies were analyzed and calculated with the feasible region of stiffness weights as the constraint condition and the minimum blade curvature as the objective function, and the optimal path of the stiffness weights relate to the load factors was obtained. A 16-ply symmetric laminated plate was used as an example to verify the optimal path of the stiffness weights. By the inverse calculation of the optimal path of the stiffness weights, the optimal ply sequences can be obtained. The method of this paper may provide some references and basis for the optimal design of the composite blades.

**Keywords:** composite material; symmetric unbalanced; bent-twist coupling effect; lay-up design