

圆型限制性三体问题中双脉冲地月转移轨道设计研究

张科^{1,2}, 谭明虎^{1,2}, 吕梅柏^{1,2}, 邢超^{1,2}

(1.西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072; 2.航天飞行动力学 国家级重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘要:基于圆型限制性三体问题模型(CR3BP),提出了一种用于设计双脉冲地月转移轨道的微分数值计算方法。通过分析地月转移过程中航天器的初始和末端状态,利用Newton-Raphson迭代法推导转移轨道的微分校正方程,并采用periapsis截面来估计转移轨道的初始状态;然后以估计的初始状态作为迭代初值,经过微分校正方程的迭代得到准确的初始状态,完成双脉冲地月转移轨道的设计,并解决了空间CR3BP多个未知参数的问题。因此,该方法不仅适用于平面CR3BP,也适用于空间CR3BP的双脉冲转移轨道设计。数值计算结果表明,该方法能有效地进行双脉冲地月转移的数值计算。另外,双脉冲地月轨道和月地返回地球的轨迹是关于 $x-z$ 平面镜像。

关键词:圆型限制性三体问题,地月转移,双脉冲,微分修正,数值方法

中图分类号:V412 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-2758(2015)01-0110-06

传统的地月转移轨道设计是基于二体模型的拼接以及在此基础上的多体摄动理论进行的,其中最典型的是Hohmann转移^[1]。近年来,由于能够减少转移过程中的能量消耗,基于限制性三体^[2]或者四体问题^[3]设计的低能转移轨道受到了广泛重视。总的来说,地月转移轨道的设计可以分来内部转移和外部转移2种形式^[4]。

外部转移主要是基于太阳、地球和月球组成的限制性四体进行的。Belbruno等^[5]提出弱稳定边界理论(WSB),并采用弹道捕获方法设计了地月低能转移轨道;之后Koon等^[3]在双圆型限制性三体问题模型的基础上利用稳定流形和不稳定流形拼接的方法设计了地月转移轨道。这种类型的转移轨道虽然有着节省耗能的优点,但是飞行时间较长。

在内部转移中,地月转移轨道的设计主要是基于地球和月球组成的限制性三体问题完成的^[6-7]。由于与平动点 L_1 相关的不变流形往往很难到达地球附近,所以这种类型的转移轨道往往需要多次机动^[8];为此,拼接圆锥曲线法被引入限制性三体问题中,用于减少机动的次数,设计双脉冲地月转移轨道^[9]。

本文针对WSB转移时间长以及在内部转移中地月转移轨道需要多次机动的问题,从微分数值计算的角度出发进行双脉冲地月转移轨道的设计。其基本思想在于利用periapsis截面估计转移轨道的初始状态,再根据Newton-Raphson迭代法推导其微分校正方程,通过迭代得到精确地地月转移的初始状态,完成双脉冲地月转移轨道的设计。

1 圆型限制性三体问题

由地球、月球和探测器组成的三体系统中,假设月球绕地球作平面圆周匀速运动,且探测器不会影响主天体的运动,圆型限制性三体问题(CR3BP)模型可以用来描述这个系统,在会合坐标系中,探测器的运动可以无量纲化为如下方程^[10]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \ddot{z} = \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \Omega = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 为会合坐标系中的等效势能函数, μ 为两主天体的质量比常数; r_1, r_2 为探测器到两主天体的距

离。在地月系统中,其质量比系数为 $\mu = 0.012\ 15$, 并存在 Jacobi 常数如下

$$C = 2\Omega(x, y, z, \mu) - (x^2 + y^2 + z^2) \quad (2)$$

2 双脉冲地月转移轨道状态分析

航天器切向逃逸高度为 167 km 的绕地低轨轨道(LEO)时的初始状态为 $\mathbf{X}_0 = (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)^T$, 其存在如下的关系:

$$r_0 = \sqrt{(x_0 + \mu)^2 + y_0^2 + z_0^2} = h_e \quad (3)$$

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = (x_0 + \mu)\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0 = 0$$

航天器的初始状态处在逆行 LEO 轨道上,所以航天器的初始状态又可以写作如下形式:

$$\mathbf{r}_0 = (-\mu + r_0 \cos\alpha \cos\beta, r_0 \cos\alpha \sin\beta, r_0 \sin\alpha)^T \quad (4)$$

式中, α 和 β 为航天器对应的经纬度,如图 1 所示。

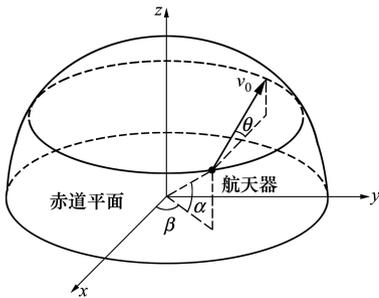


图 1 航天器初始位置矢量和速度矢量示意图

又设角度 θ 为航天器的速度矢量相对于平面 $z = r_0 \sin\alpha$ 的夹角,如图 1 所示,所以航天器的速度矢量可以写作

$$\mathbf{v}_0 = (v_0 \cos\theta \cos(\beta + \gamma), v_0 \cos\theta \sin(\beta + \gamma), v_0 \sin\theta)^T \quad (5)$$

式中, $\gamma = \cos^{-1}(-\tan\alpha \tan\theta)$ 是关于逆时针轨道的参数,并且存在如下关系

$$|\tan\alpha \tan\theta| \leq 1 \quad (6)$$

设 $\mathbf{X}_f = (x_f, y_f, z_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f, \dot{z}_f)^T$ 为航天器切向进入高度为 100 km 的绕月轨道(LMO)时的状态,那么这时航天器的状态满足如下关系:

$$r_f = \sqrt{(x_f - 1 + \mu)^2 + y_f^2 + z_f^2} = h_m \quad (7)$$

$$\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f = (x_f - 1 + \mu)\dot{x}_f + y_f\dot{y}_f + z_f\dot{z}_f = 0$$

设航天器从 LEO 逃逸所需速度增量为 Δv_1 , 而进入 LMO 时所需的速度增量为 Δv_2 , 那么双脉冲转移轨道所需总的速度增量为

$$\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (8)$$

3 微分校正法计算双脉冲地月转移轨道

首先假设探测器末状态为 $\mathbf{X}_f = (x_f, y_f, \dot{x}_f, \dot{y}_f)^T$. 探测器切向进入绕月轨道 LEO 时的速度矢量、相对于月球的位置矢量分别为 \mathbf{v}_f 和 \mathbf{r}_f , 那么在地月转移过程中,终端约束 $f(\mathbf{X})$ 可以写成如下形式:

$$f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} r_f^2 - h_m^2 \\ \mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

式中:

$$r_f^2 - h_m^2 = (x_f - 1 + \mu)^2 + y_f^2 + z_f^2 - h_m^2$$

$$\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f = (x_f - 1 + \mu)\dot{x}_f + y_f\dot{y}_f + z_f\dot{z}_f$$

根据 Newton-Rapson 迭代法,当修正参数 $[\dot{x}_0, \tau]^T$ 时,修正矩阵为:

$$\frac{df(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(r_f^2 - h_m^2) & \frac{\partial}{\partial t}(r_f^2 - h_m^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f) & \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f) \end{bmatrix} \quad (10)$$

假设迭代过程从初始状态 $(x_0^n, y_0^n, z_0^n, \dot{x}_0^n, \dot{y}_0^n, z_0^n)^T$ 开始,在时刻 $t = \tau^n$ 的状态为 $\mathbf{X}_f^n = (x_f^n, y_f^n, \dot{x}_f^n, y_f^n)^T$. 那么微分修正方程为

$$\begin{bmatrix} x^{n+1} \\ \tau^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^n \\ \tau^n \end{bmatrix} - \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} (x_f^n - 1 + \mu)^2 + y_f^{n2} + z_f^{n2} - h_m^2 \\ (x_f^n - 1 + \mu)\dot{x}_f^n + y_f^n\dot{y}_f^n + z_f^n\dot{z}_f^n \end{bmatrix} \quad (11)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

式中, $\mathbf{A} = \left(\left| \frac{df(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_n} \right)^{-1}$.

当 $|r_f - h_m| < 10^{-10}$ 和 $|\mathbf{r}_f \cdot \mathbf{v}_f| < 10^{-10}$, 满足时,迭代停止,这时计算得到的状态就可以认为是双脉冲地月轨道轨道的初始状态。

4 平面情况下,双脉冲地月转移轨道设计

平面情况下, $z = 0$ 或 $a = 0$. 在初始角度 β 给定的情况下,只有 2 个未知参数:初始速度 v_0 和飞行时间 τ . 本节内容就针对这 2 个参数进行估计。

首先定义 periapsis 截面 $r_2 = 0$ 和 $\dot{r}_2 > 0$, 这意味着航天器能够切向进入 LMO。

当初始角度 β 给定时,初始速度 v_0 和飞行时间

τ 采用如下步骤进行估计:

- 1) 首先变化初始估计速度 v_0 , 使轨迹的 periapsis 截面能够达到月球附近, 如图 2 所示;
- 2) 然后画出 periapsis 到月球的距离 r_2 和初始速度 v_0 之间的关系图, 以及 periapsis 到月球的距离 r_2 和飞行时间 τ 之间的关系图, 如图 3 所示;
- 3) 计算 periapsis 到月球的距离与 LMO 高度的

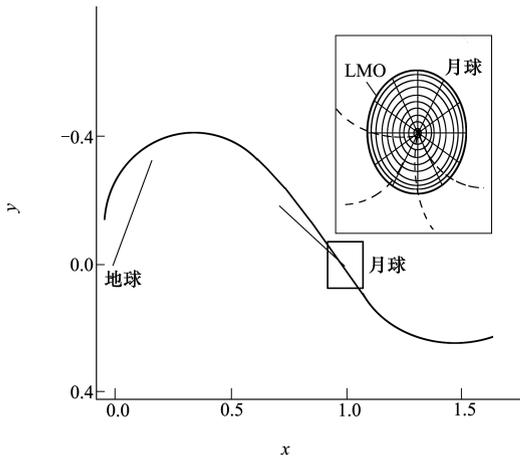


图 2 当 $\beta=0.33, v_0 \in [10.66, 10.72]$, periapsis 截面上的投影

交点,其所对应的坐标作为初始速度的估计值,同理估计飞行时间,如图 3 所示;

- 4) 以估计的估计状态为迭代初值, 带入公式 (11), 经过计算, 可以得到精确的初始状态, 然后计算得到双脉冲平面地月转移轨道, 如图 4 和图 5 所示, 其具体的参数如表 1 所示。

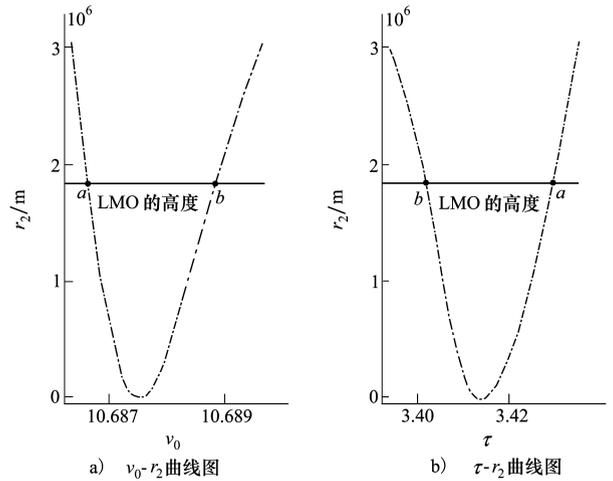


图 3 periapsis 截面上 r_2 和 v_0 的关系图以及 r_2 和 τ 的关系图

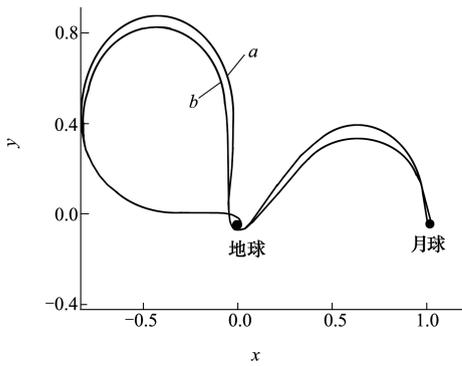


图 4 利用微分校正法计算得到的 2 条双脉冲平面地月转移轨道

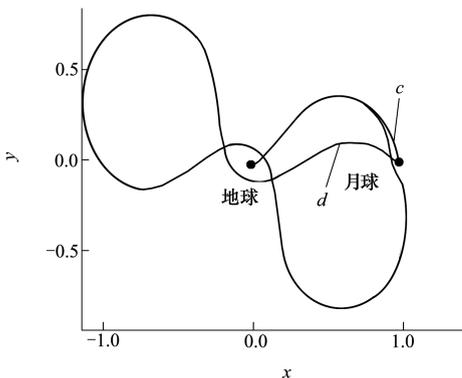


图 5 当 $\beta=4.25$, 利用微分校正法计算得到的 2 条双脉冲平面地月转移轨道

表 1 双脉冲平面地月转移轨道的具体参数

类型	Δv_1 /($m \cdot s^{-1}$)	Δv_2 /($m \cdot s^{-1}$)	Δv /($m \cdot s^{-1}$)	T /24 h
a	3 134.382	808.812	3 943.382	14.915
b	3 136.841	818.979	3 955.820	14.795
c	3 134.830	809.979	3 944.809	4.576
d	3 131.383	794.483	3 925.866	31.463
Hohmann	3 140.329	848.350	3 988.678	4.989

如表 1 所示, 相对于传统的 Hohmann 转移^[5,9], 双脉冲平面地月转移轨道有着节约耗能或者节省飞行时间的潜力, 如转移轨道 a-d 都可以达到节约耗能的效果, 而其中转移轨道 c 相比于 Hohmann 转移飞行时间更短。但是, 相比于利用不变流形的地月低能转移轨道^[5,11], 双脉冲平面地月转移轨道有着转移时间短, 耗能稍多的特点。

5 空间情况下, 双脉冲地月转移轨道设计

在假定初始角度 α 和 β 已知的前提下, 仍然存在 3 个未知参数: 初始速度 v_0 、飞行时间 τ 以及角度

θ , 而 3 个未知参数相互关联, 难以得到 $v_0-r_2, \tau-r_2$ 以及 $\theta-r_2$ 的关系图进行参数估计。为解决这个问题, 这里采用如下设计方法来降维。

这里仍利用 periapsis 截面来估计航天器的初始状态, 其截至条件为 $r_2 = 0$ 和 $\dot{r}_2 > 0$ 。

1) 首先给定一个 v_0 , 变化 θ 使轨道的轨迹在 periapsis 截面上的投影接近月球, 选取其中距离月球中心最近的投影点, 记此点到月球中心的距离为 $r_{\min} = \{r_2 \mid \tan\theta \mid \leq \mid \tan\alpha \mid^{-1}\}$;

2) 变化 v_0 , 可以得到 r_{\min} 和 v_0 的关系图, 如图 6

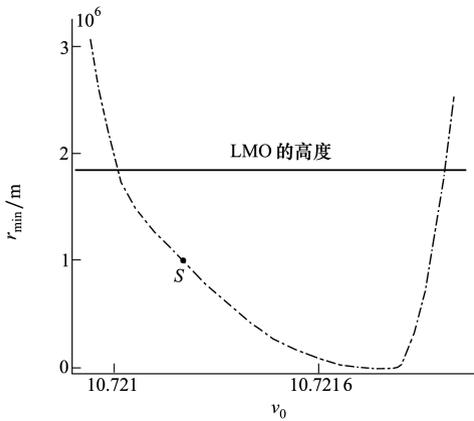
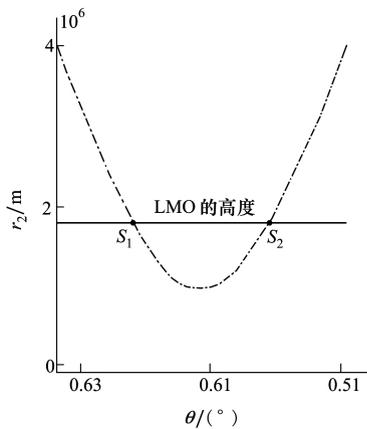
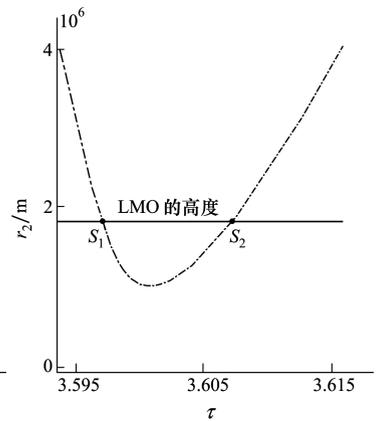


图 6 当 $\alpha=0.1 \text{ rad}$ 和 $\beta=0.33 \text{ rad}$ 时, $v_0 \in [10.66, 10.72]$, r_{\min} 和 v_0 的关系图



a) θ_0-r_2 曲线图



b) $\tau-r_2$ 曲线图

图 7 当 $\alpha=0.1 \text{ rad}$ 和 $\beta=0.33 \text{ rad}$ 时, 图中 s 对应的初始速度 $v_0 = 10.7212$ 时, r_2 和 θ 的关系图以及 r_2 和 τ 的关系图

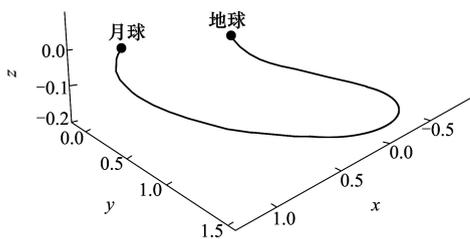


图 8 $v_0 = 10.7212$ 时, 根据图 7 中点 s_1 估计的初始值 $\theta = -0.6223$, $\tau = 3.597$, 利用微分修正法确定的双脉冲地月转移轨道

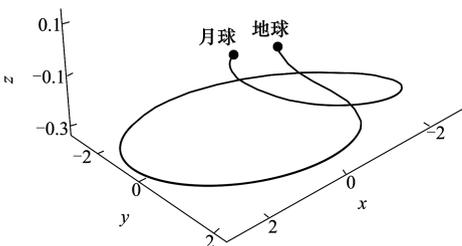


图 9 $v_0 = 10.7475$ 时, 根据初始估计值 $\theta = -0.4754$, $\tau = 9.948$, 利用微分修正法确定的双脉冲地月转移轨道

所示;

3) 取任意满足条件 $r_{\min} \leq 1838 \text{ km}$ 对应的 v_0 作为航天器的初始速度, 如图 6 所示;

4) 根据确定的 v_0 , 变化 θ 画出 periapsis 到月球的距离 r_2 和 q 的关系图; 寻找 periapsis 到月球的距离 r_2 与 LMO 高度的交点, 交点所对应的坐标作为初始速度方向角 θ , 如图 7 所示;

5) 同步步骤 4) 得到飞行时间的估计值, 如图 7 所示。

通过上述设计步骤, 航天器的初始状态的估计

值就能够确定; 然后以估计的初始状态为迭代初值, 通过微分校正方程 (11) 得到双脉冲空间地月转移轨道精确的初始状态。计算得到的轨道如图 8 和图 9 所示, 具体的参数如表 2 所示。

表 2 当 $\alpha=0.1 \text{ rad}, \beta=0.33 \text{ rad}$, 双脉冲空间地月转移轨道参数

类型	Δv_1 /($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Δv_2 /($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	Δv /($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	T /24 h
图 8	3 170.001	963.044	4 133.044	15.643
图 9	3 196.121	965.767	4 271.710	43.266

6 双脉冲月地返回轨道设计

在 CR3BP 系统中, 如果 X_f 表示从初始状态 X_0 沿着路径 $\phi(X_0, t)$ 出发后在时刻 T 的状态, 那么必然存在一个轨迹从 RX_0 到 RX_f , 同时这个轨迹与原轨迹是关于 $x-z$ 平面对称的。其中

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

根据这个性质,双脉冲月地返回轨道可由双脉冲地月转移轨道关于 $x-z$ 平面镜像得到,如图 10 至图 11 所示。

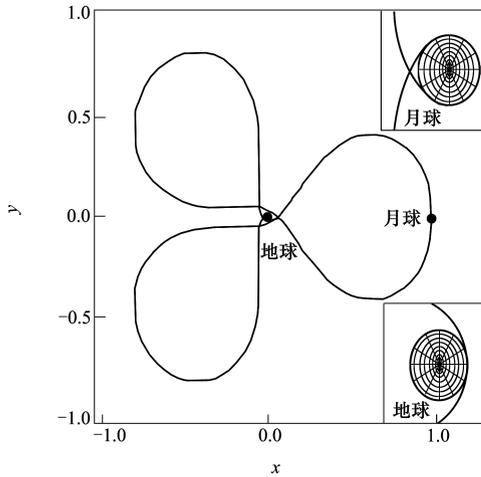


图 10 双脉冲平面地月转移轨道与双脉冲平面月地返回轨道,对应着图 4 中 a 的转移轨道

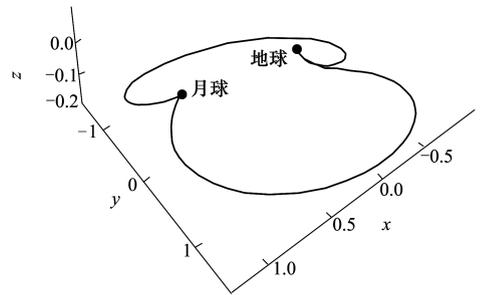


图 11 双脉冲空间地月转移轨道与双脉冲空间月地返回轨道,对应着图 8 中的转移轨道

7 结 论

本文基于圆型限制性三体问题模型 (CR3BP), 提出了一种用于设计双脉冲地月转移轨道的数值微分计算方法。

1) 通过分析双脉冲地月转移轨道的初末状态, 利用 Newton-Rapson 迭代法推导了转移轨道的微分校正方法。

2) 利用 periapsis 截面对转移轨道的转移进行了估计, 根据估计值, 经过微分校正方法, 得到了转移轨道精确的初始状态, 能够有效地进行双脉冲地月转移的数值计算。

3) 针对双脉冲空间地月转移轨道中出现多个未知参数的问题, 设计了降维方法。

4) 根据 CR3BP 的对称性可得, 双脉冲地月轨道和双脉冲月地返回地球的轨迹是关于 $x-z$ 平面镜像。

参考文献:

- [1] Bate R R, Mueller D D, White J E. Fundamentals of Astrodynamics[M]. New York, Dover, 1971
- [2] Szebehely V. Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies[M]. New York, Academic Press, 1967
- [3] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, Ross S D. Low Energy Transfer to the Moon[J]. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 2001, 9: 63-73
- [4] Francesco Topputo. On Optimal Two-Impulse Earth-Moon Transfers in a Four-Body Model[J]. Celest Mech Dyn Astr, 2013, 117:279-313
- [5] Belbruno E A, Miller J K. Sun-Perturbed Earth to Moon Transfers with Ballistic Capture[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1993, 16(4): 770-775
- [6] Belbruno E. Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth-Moon Trajectories and the Lunar GAS Mission[C] // Proceedings of the AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference, 1987
- [7] Miele A, Mancuso S. Optimal Trajectories for Earth-Moon-Earth Flight[J]. Acta Astronautica, 2001, 49(2): 59-71
- [8] Topputo F, Vasile M, Bernelli-Zazzera F. Earth-to-Moon Low Energy Transfers Targeting L1 Hyperbolic Transit Orbits[J]. An-

nals of the New York Academy of Sciences, 2005, 1065: 55-76

- [9] Yagasaki K. Computation of Low Energy Earth-to-Moon Transfers with Moderate Flight time[J]. *Physica D*, 2004, 197(3/4): 313-331
- [10] Tan M H, Zhang K, Lv M B, Xing C. Transfer to Long Term Distant Retrograde Orbits around the Moon[J]. *Acta Astronautica*, 2014, 98: 50-63
- [11] 张汉清. 共线平动点动力学系统研究和轨道研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2011
- Zhang H Q. Research on Collinear Libration Point Dynamical Systems and Trajectory Design[D]. Xi'an, Northwestern Polytechnical University, 2011 (in Chinese)

Calculating Two-Impulse Earth-Moon Transfers in the Circular Restricted Three-Body Problem

Zhang Ke^{1,2}, Tan Minghu^{1,2}, Lü Meibo^{1,2}, Xing Chao^{1,2}

(1.College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
2.National Key Laboratory of Aerospace Flight Dynamics at Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A numerical differential method is developed for calculating the two-impulse trajectories for Earth-Moon transfers in the circular restricted three-body problem (CR3BP). By analyzing the initial and final states of the spacecraft, the Newton-Raphson method is applied to deducing the differential equations of these transfers and the periapsis map is introduced to guess the initial states. With the initial guess, the differential method yields the accurate initial state within a few iterations and then the two-impulse Earth-Moon transfer will be accomplished. Especially for the spatial CR3BP, a simple design procedure is developed to deal with the problem that arises from more unknown parameters. Thus, this method is applied not only to the planar CR3BP but also to the spatial CR3BP, and their analysis indicates preliminarily that that this method can effectively enable a large set of two-impulse Earth-Moon transfers to be computed numerically. Moreover, the two-impulse Earth-Moon trajectories and the Moon-Earth return trajectories are mirror images of one another with aspect to the x-z plane or the x-axis.

Key words: calculations, differential equations, Newton-Raphson method, numerical methods, trajectories, circular restricted three-body problem, differential correction, Earth-Moon transfer, two impulse