多输出情况下重要性测度新指标及其高效求解

王飞，吕震宙，肖思男

（西北工业大学 航空学院，陕西 西安　710072）

摘　要:输入随机变量的重要性测度分析是结构安全评估和工程优化设计的重要组成部分。针对工程结构系统中普遍存在的多维输出情况,提出一种使用无量纲模型的基于方差的重要性测度新指标,可以方便地综合衡量输入随机变量的变异性对多输出结构系统变异性影响的重要程度,而且能够有效地保留各输出提供的重要性测度信息。同时,针对 Monte Carlo 数字模拟方法巨大的计算代价问题,采用一种乘法降维的功能函数替代模型来求解指标。该方法可在保证求解精度的同时极大地降低了模型调用次数,节约了计算成本。最后,通过数值算例和工程算例说明所提指标的合理性以及求解模型的高效性。

关　键　词:多输出;重要性测度;系统不确定性;方差分析;降维模型;降低成本

中图分类号:TB114.3　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1000-2758(2015)04-0546-07

多输出性能的模拟是飞机结构系统中常见的问题。一方面我们关心的输出性能通常有多个,如研究复合材料飞机结构往往要同时关注最大位移和临界强度等多个输出性能[1];另一方面,结构系统的输出性能模型可能随时间和空间发生变化[2],如结构系统的动态性能等。传统的重要性测度分析对每个输出进行产生多个重要性测度结果,很难从整体上对工程设计给出实用的指导。针对结构系统多输出情况下的重要性测度分析,Gamboa 等人基于协方差分解定义了一种新的广义重要性测度指标[3]。而 Campbell 等人基于输出分解方法提出在一个合适的函数基底上展开原模型再进行重要性测度分析的方法[4]。这 2 个指标都由传统的基于方差的 Sobol 指标[5]发展而来,而 Ruan 等人[6]提出了一种改进的方差重要性测度,该改进的指标包含输入变量对输出响应量方差影响的更全面信息。本文将在文献[6]基础上利用 Gamboa 等人提出的协方差分解方法,定义了结构系统多输出情况下重要性测度新指标。Gamboa 等人给出了其所提指标求解的 Monte Carlo 算法,但其计算代价十分巨大,不适合大多数工程实际问题。Garcia-Cabrejo 等人[7]总结了 Gamboa 和 Campbell 所提的 2 种指标,并把多项式混沌展开(PCE)方法引入到多输出情况下重要性测度的求解,相对于文献[3]中的 Monte Carlo 数字模拟法和文献[4]中的主成分分析方法,PCE 极大地减少了模型运行次数。对于单个输出的重要性测度分析,文献[8]提到 Rosenblueth 建议使用一种降维的代理模型,从而极大地降低了运算量。Zhang 等人在此基础上提出乘法降维模型(M-DRM),相对于 PCE 方法进一步减少了模型调用次数。本文将 M-DRM 方法扩展到结构系统多输出情况下重要性测度新指标的求解。

1　多输出情况下重要性测度新指标

1.1　基于方差的重要性测度指标

Sobol 等人[5]利用响应量方差的 ANOVA (analysis of variance)分解给出了基于方差的重要性测度指标。根据 ANOVA 分解,功能函数 $Y = g(\boldsymbol{x})$ 可以被分解为一系列子项之和,即

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g_0 + \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) +$$

收稿日期:2015-03-10

作者简介:王飞(1991—),西北工业大学硕士研究生,主要从事飞行器可靠性研究。

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1+1}^{n} g_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2}) + \cdots + g_{1\cdots n}(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 n 维输入变量，g_0 表示 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的均值，$g_i(x_i)$ 表示由于 x_i 变化引起的 $Y=g(\boldsymbol{x})$ 的变化，而 $g_{i_1 i_2}(x_{i_1},x_{i_2})$ 给出了 x_{i_1}，x_{i_2} 相互作用对输出的影响。在基本输入变量相互独立的情况下，响应量的方差可以由各方差分解项之和表示，即

$$V=\sum_{i=1}^{n} V_i + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=i_1+1}^{n} V_{i_1 i_2} + \cdots + V_{1,2,\cdots,n} \tag{2}$$

其中各方差分解项为

$$V=\int g(x)f(x)\,\mathrm{d}x - g_0^2$$

$$V_{i_1,\cdots,i_s}=\int g_{i_1,\cdots,i_s}^2(x_{i_1},\cdots,x_{i_s})\prod_{j\neq i_1,\cdots,i_s}^{n}[f_{X_j}(x_j)\,\mathrm{d}x_j]$$

$$j_1<j_2<\cdots<j_k$$

$$g_{i_1\cdots i_s}(x_{i_1},\cdots,x_{i_s})=\int g(x)\prod_{j\neq i_1,\cdots,i_s}^{n}[f_{X_j}(x_j)\,\mathrm{d}x_j] -$$

$$\sum_{k=1}^{s-1}\sum_{j_1,\cdots,j_k\in(i_1,\cdots,i_s)} g_{i_1\cdots i_k}(x_{i_1},\cdots,x_{i_k}) - g_0 \tag{3}$$

公式(2)表明输出响应量的方差可以分解为各个输入变量以及它们相互作用的方差项，基于方差的重要性测度指标 $S_{i_1,\cdots,i_s}$ 则定义为方差分解项与响应量方差之比，即

$$S_{i_1,\cdots,i_s}=V_{i_1,\cdots,i_s}/V \tag{4}$$

公式(4)中对应于单个输入变量的重要性测度指标为

$$S_i=V_i/V \tag{5}$$

文献[10]中给出了各方差项的求解公式为

$$V_i=\mathrm{var}[\mathrm{E}(Y\mid X_i)]$$
$$V=\mathrm{var}(Y) \tag{6}$$

式中，E(·)为期望算子，V(·)为方差算子。

1.2　多输出情况下重要性测度指标

基于方差的重要性测度只适用于单个输出情况。针对多输出情况，Gamboa 等人[3]基于协方差分解方法定义了一种新的广义重要性测度指标。首先考虑 $Y_1=f(X_1,\cdots,X_n)$ 和 $Y_2=g(X_1,\cdots,X_n)$ 2 个单模式输出。定义 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是输入变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的 2 个互补子集，根据 ANOVA 分解，2 个输出响应可以分解为

$$Y_1=f_0+f_u+f_v+f_{u,v}$$
$$Y_2=g_0+g_u+g_v+g_{u,v} \tag{7}$$

进一步推导如下

$$(Y_1-f_0)(Y_2-g_0)=f_u g_u+f_v g_v+$$
$$(f_u g_v+f_v g_u+\cdots+f_{u,v}g_{u,v}) \tag{8}$$

对公式(8)做期望处理可得 Y_1 和 Y_2 的协方差分解，即

$$C(Y_1,Y_2)=C_u+C_v+C_{u,v} \tag{9}$$

公式(9)的分解表明 Y_1 和 Y_2 的协方差可以分解为：子集 $\boldsymbol{u}$ 中输入变量变化引起的协方差，子集 $\boldsymbol{v}$ 中输入变量变化引起的协方差和子集 $\boldsymbol{u}$ 与子集 $\boldsymbol{v}$ 相互作用的影响项。进一步扩展到 m 个输出模式，则有

$$C(Y_1,\cdots,Y_m)=\sum_{i=1}^{n} C_i(Y_1,\cdots,Y_m) +$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} C_{i,j}(Y_1,\cdots,Y_m)+\cdots+C_{1,2,\cdots,n}(Y_1,\cdots,Y_m) \tag{10}$$

为得到标量形式的指标，Gamboa 在文献[3]中建议对公式左乘一个 $\boldsymbol{M}$ 矩阵再求取矩阵的迹，并说明 $\boldsymbol{M}$ 取为单位矩阵，即

$$\mathrm{Tr}[C(Y_1,\cdots,Y_m)]=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}[C_i(Y_1,\cdots,Y_m)] +$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Tr}[C_{i,j}(Y_1,\cdots,Y_m)] +$$
$$\cdots+\mathrm{Tr}[C_{1,2,\cdots,n}(Y_1,\cdots,Y_m)] \tag{11}$$

进而得出多输出模式下单个输入变量的重要性测度指标

$$S_i(Y_1,\cdots,Y_m)=\frac{\mathrm{Tr}[C_i(Y_1,\cdots,Y_m)]}{\mathrm{Tr}[C(Y_1,\cdots,Y_m)]} \tag{12}$$

以条件矩的形式表示(12)式指标，可得

$$S_i(Y_1,\cdots,Y_m)=\frac{\sum_{j=1}^{m} V[\mathrm{E}(Y_j\mid X_i)]}{\sum_{j=1}^{m} V(Y_j)} \tag{13}$$

由于不同输出的响应量量纲的差异，公式(13)对于方差的直接加和运算会抹除某些输出模式的方差效应，造成集成的指标失去部分输出模式的有效信息，从而使得所定义的广义重要性测度指标失去了对工程设计的指导意义。为此，我们将使用无量纲化的输出模型进行多输出情况下的重要性测度分析，即

$$Y_i=Y_i/\mathrm{E}(Y_i)\quad i=1,\cdots,m \tag{14}$$

这样，Gamboa 定义的广义重要性测度指标转化为

$$S_i(Y_1/\mathrm{E}(Y_1),\cdots,Y_m/\mathrm{E}(Y_m))$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} V[\mathrm{E}((Y_j/\mathrm{E}(Y_j)) \mid X_i)]}{\sum_{j=1}^{m} V(Y_j/\mathrm{E}(Y_j))}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{V[\mathrm{E}(Y_j \mid X_i)]}{\mathrm{E}^2(Y_j)}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{V(Y_j)}{\mathrm{E}^2(Y_j)}} \tag{15}$$

1.3 多输出情况下重要性测度新指标

公式(15)是基于传统的 Sobol 指标定义的,而 Ruan 等人在文献[6]中提出可以变换公式(6)中 V_i 的求解公式可以得到,

$$V_i = V[\mathrm{E}(Y \mid X_i)] = V(Y) - \mathrm{E}[V(Y \mid X_i)] = \mathrm{E}[V(Y) - V(Y \mid X_i)] \tag{16}$$

从(16)式的推导可以看出:当输入变量 X_i 取不同实现值时,V_i 实际上定义为 $V(Y)$ 与 $V(Y \mid X_i)$ 差的平均值,反映了其对响应量无条件方差的平均影响。但这种期望运算可能使 $V(Y) - V(Y \mid X_i)$ 在 X_i 的随机取值范围内的正负值相互抵消而掩盖了输入变量 X_i 的 V_i 对于响应量方差的较大影响。为避免上述指标求解过程中存在的正负抵消问题,可以引入平方运算,即:$V_i^m = \sqrt{\mathrm{E}[V(Y) - V(Y \mid X_i)]^2}$。它保证了在期望运算后 X_i 的每个实现值对响应量方差的影响被完整的保留下来而不会由于正负值相互抵消而掩盖某些影响。对改进的指标计算式进一步推到如下:

$$S_i^m = \frac{\sqrt{\mathrm{E}[V(Y) - V(Y \mid X_i)]^2}}{V(Y)} =$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{E}^2[V(Y) - V(Y \mid X_i)] + V[V(Y) - V(Y \mid X_i)]}}{V(Y)}$$

$$= \sqrt{S_i^2 + \frac{V[V(Y \mid X_i)]}{V^2(Y)}} \tag{17}$$

由(17)式可以看出,改进的指标 S_i^m 实际上是对原指标的一种修正,即在 S_i 的基础上考虑了 X_i 不同实现值时对响应量方差影响的变异性 $V[V(Y \mid X_i)]$,更加完整地反映 X_i 取不同实现值对响应量所造成的影响。在结构系统多输出情况下,通过 X_i 取不同实现值对各个输出情况下响应量方差所造成的影响的加和来权衡 X_i 对系统的重要性程度,此时更加完整地反映 X_i 对每个输出情况下响应量方差所造成的影响是十分必要且有意义的。

结合上述观点,我们可以定义结构系统多输出情况下重要性测度新指标:

$$S_i^m(Y_1, \cdots, Y_m) = \frac{\sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{V^2[\mathrm{E}(Y_j \mid X_i)] + V[V(Y_j \mid X_i)]}}{\mathrm{E}^2(Y_j)}}{\sum_{j=1}^{m} \frac{V(Y_j)}{\mathrm{E}^2(Y_j)}} \tag{18}$$

2 多输出情况下重要性测度新指标的求解

用于结构系统多输出情况下重要性测度指标的求解方法很多,各有优缺点。如文献[3]中的 Monte Carlo 数字模拟法,文献[6]中的 SDP 方法,文献[7]中的 PCE 方法等等。其中 Monte Carlo 数字模拟法最为直观,且易于编程实现。Monte Carlo 数字模拟法的收敛解可作为精确解,但其需要采用双层抽样计算,效率低,在本文中将 Monte Carlo 法的求解结果解作为参考对照解。由于乘法降维模型的高效性,本文将在此模型的基础上建立新指标的求解方法,具体过程如下。

2.1 乘法降维模型

如果基本输入变量之间是相互独立的,Rosenblueth 建议可以采用下式所示的 h' 逼近原始的功能函数 h:

$$h(x) \approx h'(x) = h_0 \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i})}{h_0} \right) = h_0^{1-n} \times \prod_{i=1}^{n} h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i})$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{19}$$

式中,h_0 表示所有基本输入变量取均值时功能函数的响应值,$h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i})$ 表示除输入变量 x_i 外其他基本输入变量都取均值时功能函数的响应值。文献[9]中给出了乘法降维模型应用到传统单模式 Sobol′重要性测度的详细过程。本文将这种替代模型应用到新指标的求解中。为后续计算推导表示方便,引入如下计算式,

$$\rho_i = \mathrm{E}[h(X_i)] = \int_{X_i} h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i}) f(x_i) \mathrm{d}x_i$$

$$\theta_i = \mathrm{E}\{[h(X_i)]^2\} = \int_{X_i} [h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i})]^2 f(x_i) \mathrm{d}x_i$$

$$\omega_i = \mathrm{E}\{[h(X_i)]^4\} = \int_{X_i} [h(x_i, \boldsymbol{\mu}_{-i})]^4 f(x_i) \mathrm{d}x_i$$

$$\tag{20}$$

式中,$h(X_i)=h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})$ 表示公式(19)降维替代模型中各输入变量一维计算模型,而 ρ、θ、ω 分别表示各输入变量一维计算模型的一阶矩、二阶矩和四阶矩。ρ、θ、ω 的计算可采用 Gauss 型求积公式[11],同时针对不同的输入分布采用不同类型的 Gauss 型求积公式。如 Gauss-Chebyshev 求积公式可以用于均匀分布,Gauss-Hermite 求积公式可以用于正态分布,Gauss-Laguerre 求积公式可以用于指数分布等。$(n+1)$ 个节点的 Gauss 型求积公式的代数精度可以达到 $(2n+1)$,本文的 2 个算例均采用 5 节点的 Gauss 型求积公式,在减少调用模型次数同时保证求解精度。

2.2　新指标的求解

为简明推导过程,先令 $Y=h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示任意一个单模式输出响应,则替代模型化为 $h(x)=h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})$ 带入新指标(18)各项推导如下,

响应量方差的求解:

$$\mathrm{E}[Y]\approx\mathrm{E}\left[h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})\right]$$

$$=h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}E[h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})]=h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}\rho_i$$

$$\mathrm{E}[Y^2]\approx\mathrm{E}\left[\left(h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})\right)^2\right]$$

$$=h_0^{2-2n}\times\prod_{i=1}^{n}E[(h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i}))^2]=h_0^{2-2n}\times\prod_{i=1}^{n}\theta_i$$

$$V(Y)=\mathrm{E}[Y^2]-\mathrm{E}^2[Y]$$

$$=\mathrm{E}^2[Y]\times\left[\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{\rho_i^2}\right)-1\right]\tag{21}$$

条件方差的求解:

$$\mathrm{E}(Y|X_i)=\mathrm{E}_{-i}\left[h_0^{1-n}\times\prod_{i=1}^{n}h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})\right]$$

$$=h_0^{1-n}\times h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})\times\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k\tag{22}$$

这样将 $\mathrm{E}(Y|X_i)$ 看成 X_i 的单一变量函数,求解其响应量的方差,

$$V[\mathrm{E}(Y|X_i)]=V\left[h_0^{1-n}\times h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})\times\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k\right]$$

$$=h_0^{2-2n}\times\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k^2\times V[h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})]$$

$$=\mathrm{E}^2[Y]\times\left(\frac{\theta_i}{\rho_i^2}-1\right)\tag{23}$$

$V[V(Y|X_i)]$ 的求解:先求解 $V(Y|X_i)$,

$$\mathrm{E}(Y^2|X_i)=h_0^{2-2n}\times[h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})]^2\times\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\theta_k$$

$$V(Y|X_i)=\mathrm{E}(Y^2|X_i)-\mathrm{E}^2(Y|X_i)=h_0^{2-2n}\times\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\theta_k-\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k^2\right)\times[h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})]^2\tag{24}$$

这样将 $V(Y|X_i)$ 看成 X_i 的单一变量函数,求解其响应量的方差,

$$V[V(Y|X_i)]=h_0^{4-4n}\times\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\theta_k-\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\rho_k^2\right)^2\times V\{[h(x_i,\boldsymbol{\mu}_{-i})]^2\}$$

$$=\frac{\mathrm{E}^4[Y]}{\rho_i^4}\times\left[\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{\theta_k}{\rho_k^2}\right)-1\right]^2\times(\omega_i-\theta_i^2)\tag{25}$$

结构系统多输出情况下重要性测度新指标的求解:

$$S_i^m(Y_1,\cdots,Y_m)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\left(\frac{\theta_{ji}}{\rho_{ji}^2}-1\right)^2+\frac{\left[\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{n}\frac{\theta_{jk}}{\rho_{jk}^2}\right)-1\right]^2\times(\omega_{ji}-\theta_{ji}^2)}{\rho_{ji}^4}}}{\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta_{ji}}{\rho_{ji}^2}\right)-1\right]}\tag{26}$$

从公式(26)可以看出,使用乘法降维替代模型求解新指标只需要 $m\times[n\times l-(n-1)]$ 次功能函数运算就可以获得很精确的结果(其中 m 表示输出模式个数,n 表示输入变量个数,l 表示求解降维后单变量函数前几阶矩时所需的高斯积分点数)。这相比于 SDP 方法和 Monte Carlo 数字模拟法显得更加高效,极大地节约了模型运算成本。

3　算例分析

3.1　数值算例

考虑如下多输出功能函数,

$$\begin{cases}y_1=(3\times x_1^2+1)\times(0.1\times x_2^2+1)\times(6\times x_3^2+1)/3\\ y_2=(4\times x_1^2+1)\times(2\times x_2^2+1)\times(x_3^2+1)/8\\ y_3=\left(\dfrac{4\times x_1-2+3}{1+3}\right)*\left(\dfrac{4\times x_2-2+2}{1+2}\right)*\left(\dfrac{4\times x_3-2+15}{1+15}\right)\end{cases}\tag{27}$$

式中, x_1,x_2,x_3 服从[0,1] 上的均匀分布,且相互独立。计算结果如表 1 所示。

表 1 数值多输出算例的新指标求解结果

Inputs	Means	$S_i(y_1)$	$S_i(y_2)$	$S_i(y_3)$	$S_i^m(Y)$	$S_i(Y)'$	$S_i(Y)$
X_1	M-MDR	0.669	0.696	0.565	0.643	0.667	0.331
	MCS	0.662	0.696	0.563	0.640	0.661	0.327
X_2	M-MDR	0.058	0.589	0.706	0.426	0.120	0.043
	MCS	0.058	0.586	0.701	0.424	0.119	0.043
X_3	M-MDR	0.733	0.424	0.152	0.452	0.688	0.512
	MCS	0.721	0.419	0.151	0.446	0.678	0.506

表 1 中 $S_i(Y)'$ 表示基于文献[6] 作了修改的文献[3] 中提出的多输出情况下重要性测度指标;M-MDR 表示乘法降维方法,MCS 表示 Monte Carlo 数字模拟法。

从计算结果来看,本文提出的多输出情况下重要性测度新指标 $S_i^m(Y)$ 得出的输入变量重要性排序与文献[3] 中的原指标 $S_i(Y)$ 以及 $S_i(Y)'$ 并不一致。$S_i^m(Y)$ 给出的重要性排序为 $X_1 > X_3 > X_2$,而 $S_i(Y)$ 给出的重要性排序为 $X_3 > X_1 > X_2$,且输入变量 X_2 的重要性几乎可以忽略。因为 $S_i(Y)$ 直接对不同输出的方差进行加和,而利用乘法降维方法解出的 y_1、y_2 和 y_3 3 个输出方差为 2.682、0.207、0.119,这使得 y_2 和 y_3 2 个输出情况提供的有效信息几乎完全损失了,最终得出的重要性排序以及输入变量间的相对重要性程度与输出 y_1 一致。$S_i^m(Y)$ 先对原始输出作无量纲化处理,得到的利用乘法降维方法解出的新 y_1、y_2 和 y_3 3 个输出无量纲方差为 0.628、0.494、0.540,这样 3 种输出情况所提供的重要性测度信息都被充分有效利用,X_2 对于系统的综合影响得到合理估计,最终得到合理的新重要性排序。因此相比较而言,多输出情况下重要性测度新指标 $S_i^m(Y)$ 充分考虑了各个输出模式中输入变量的重要性测度信息,更为合理可取。$S_i(Y)$ 和 $S_i(Y)'$ 得出各输入变量间的相对重要性程度差异也表明引入文献[6] 的改进措施可以更加完整地反映 X_i 对每个输出情况下响应量方差所造成的影响,进而使新指标 $S_i^m(Y)$ 衡量的综合影响更加完整合理。

从计算效率和精度方面来说,乘法降维方法具有很大的优势,只需要 3×(3×5−2)= 45 次模型运算即可得到满意的结果。而运用 Monte Carlo 数字模拟法求解则需抽取 20 000 个样本点,进行双层循环调用模型才能得到较好的收敛结果,效率很低,代价昂贵。

3.2 工程算例

复合材料层合结构因其高的比强度、比刚度和低质量等优越性能而在航空航天领域得到了广泛应用。但是,由于复合材料力学性能具有较大的分散性和随机性,因此研究这些不确定性对复合材料结构的输出响应性能影响具有十分重要的意义。为此,本算例将以单层板材料力学性能、铺设角、铺层厚度及加载载荷视为随机输入变量,复合材料结构输出位移和强度比视为多个输出响应量,研究不同输入变量的不确定性对复合材料结构多输出响应量的方差贡献大小。

层合板悬臂梁的上面板受到垂直于面板的压力 $F=0.1$ MPa,梁的截面尺寸和网格形式如图 1,其中 $a=50$ mm, $b=40$ mm, $c=t=2$ mm,悬臂梁长度 $l=600$ mm,各单层板厚度为 $d=0.25$ mm,梁腹板的铺层顺序为 $(45°/-45°/-45°/45°)_S$,梁面板的铺层顺序为 $(45°/-45°/0°/90°)_S$。单层板性质数据为 $E_{11}=135$ GPa, $E_{22}=8.8$ GPa, $\nu_{12}=0.33$, $X_t=X_c=1.5$ GPa, $Y_t=40$ MPa, $Y_c=246$ MPa, $S=68$ MPa。上述材料性质、铺设角、铺层厚度以及压力作为随机输入变量,且假定相互独立,均服从正态分布,变异系数都为 0.06,铺设角的分散性以 0.5°的标准差来表示。

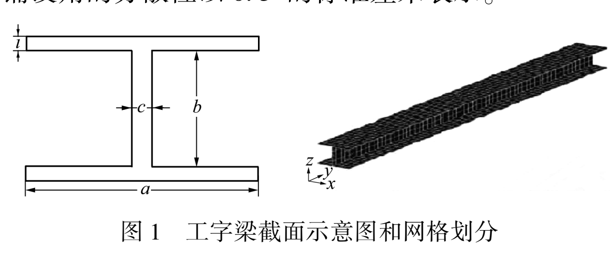

图 1 工字梁截面示意图和网格划分

利用 PCL 语言控制 Patran/Nastran 有限元分析

软件调用上述工字梁模型 17×5-16=69 次,求得相应的输出响应最大位移和临界强度比的值;最后运用本文所述方法即可求得基本输入变量对于多输出响应最大位移和临界强度比的总的影响程度。结果如图 2 所示。

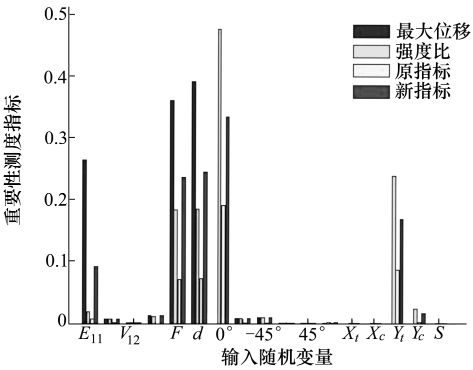

图 2　复合材料梁的新指标求解结果

某一随机输入变量对于不同的输出相应模式的重要性有很大不同。影响输出响应最大位移方差的主要输入变量排序为 $d>F>E_{11}$,而影响输出响应强度比方差的主要输入变量排序却为 $0°>Y_t>d>F$。基于响应量方差的输入变量对 2 种输出方差的综合影响的重要性排序为 $0°>Y_t>d>F$,这个排序与对强度比方差影响排序一致且重要性程度相当,这是此工程实例中由于强度比方差远大于最大位移方差的原因,从而使得原指标完全没有利用到最大位移输出模式提供的信息。因此对于此类的多输出响应的工程问题,文献[3]中提出的多输出情况下重要性测度指标难以提供有效的实际指导意义。而本文提出重要性测度新指标可以有效地避免上述问题,充分利用每个输出模式提供的重要性信息。对于本工程实例,新指标很好地度量了 0°和 E_{11}2 个输入变量在多输出模式下的综合重要性程度,体现了 E_{11} 的重要性影响。所以多输出情况下重要性测度新指标合理衡量了输入变量对各个输出响应量方差的综合影响。从计算代价方面看,相比较于提出本例的文献[1]中所采用的 SDP 法(需 1 000 次模型调用),新指标求解所需的 17×5-16=69 次模型调用是十分高效的。

4　结　论

本文主要提出了一种针对结构系统多输出情况下基于方差的重要性测度的新指标,用以衡量各输入变量的变异性对多输出结构系统变异性综合影响的重要程度,指导工程实际按新指标对输入变量进行重要性度量和排序。一方面,新指标中先对原始输出模型作无量纲化处理,从而充分考虑了每个输出模式的作用;另一方面,新指标采用修改的基于方差的主重要性测度指标,从而更完整地保留输入变量对响应量方差的影响信息。本文将乘法降维替代模型引入到多输出情况下基于方差的主重要性测度的新指标,准确高效。使用乘法降维替代模型求解新指标只需要 $m×[n×l-(n-1)]$次功能函数运算就可以获得很精确的结果(其中 m 表示输出模式个数,n 表示输入变量个数,l 表示求解降维后单变量函数前几阶矩时所需的高斯积分点数)。这相比于 SDP 方法和 Monte Carlo 数字模拟法显得更加高效,极大地节约了模型运算成本。

参考文献:

[1]　阮文斌,吕震宙,安军,等. 不确定条件下复合材料结构的全局灵敏度分析[J]. 复合材料学报, 2014, 31(3):699-706
Ruan W B, Lu Z Z, An J, et al. Global Sensitivity Analysis for Composite Strucatures with Uncertainties[J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2014, 31(3): 699-706 (in Chinese)

[2]　Lamboni M, Monod H, Makowski D. Multivariate Sensitivity Analysis to Measure Global Contribution of Input Factors in Dynamic Models[J]. Reliab Eng Syst Safety, 2011, 976: 450-459

[3]　Gamboa F, Janon A, Klein T, Lagnoux A. Sensitivity Indices for Multivariate Outputs[J]. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, 2013, 351:307-310

[4]　Campbell K, Mckay M, Williams B. Sensitivity Analysis when Model Outputs are Functions[J]. Reliab Eng Syst Safety, 2006, 91(10/11):1468-1472

[5]　Sobol I M. Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates[J]. Mathematics and Computer in Simulation, 2001, 55(1): 221-280

[6] Ruan W B, Lu Z Z, Tian L F. A Modified Variance-Based Importance Measure and Its Solution by State Dependent Parameter [J]. Journal of Risk and Reliability, 2012, 227(1): 3-15

[7] Garcia-Cabrejo O, Valocchi A. Global Sensitivity Analysis for Multivariate Output Using Polynomial Chaos Expansion[J]. Reliab Eng Syst Safety, 2014, 126: 25-36

[8] 吕震宙,宋述芳,李洪双,等. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京:科学出版社,2009
Lü Z Z, Song S F, Li H S, et al. Analysis of Reliability and Sensitivity for Structures[M]. Beijing: Science Press, 2009 (in Chinese)

[9] Zhang X F, Pandey M D. An Effective Approximation for Variance-Based Global Sensitivity Analysis[J]. Reliab Eng Syst Safety, 2013, 121: 167-174

[10] Saltelli A, Tarantola S. On the Relative Importance of Input Factors in Mathematical Models: Safety Assessment for Nuclear Waste Disposal[J]. Journal of the American Statistical Association, 2002, 97(459): 702-709

[11] 欧阳洁,聂玉峰,车刚明,等. 数值分析. 北京:高等教育出版社,2009
Ouyang J, Nie Y F, Cheng G M, et al. Numerical Analysis[M]. Beijing: Higher Education Press, 2009 (in Chinese)

New Global Sensitivity Indices for Structure System with Multivariate Outputs and Their Effective Solution

Wang Fei, Lu Zhenzhou, Xiao Sinan

(College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an710072, China)

Abstract: Global sensitivity analysis for input random variables is an important component of safety evaluation and optimal design in engineering structure. For many mathematical models encountered in engineering structure system involving multivariate outputs, this paper defines a set of new variance-based global sensitivity indices based on dimensionless model. These indices can synthetically measure the uncertainty effect on the multivariate outputs induced by the corresponding input random variable expediently and can effectively keep global sensitivity analysis information of each output. Simultaneously, to solve the costly computation problem in the Monte Carlo simulation, we calculate the new index by using a surrogate model which is based on a multiplicative version of the dimensional reduction method. The algorithm can greatly reduce model calls and save the calculation cost without decreasing its accuracy. Lastly, a numerical example and an engineering example are presented to show the reasonableness of the proposed index and the efficiency of the algorithm.

Key words: multivariate outputs, global sensitivity analysis, uncertainty of system, analysis of variance (ANOVA), dimensional reduction model (DRM), cost reduction