

空间相依圆形马尔可夫可修系统可靠性分析

王丽英¹, 司书宾²

(1. 石家庄铁道大学 数理系, 河北 石家庄 050043; 2. 西北工业大学 机电学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 针对具有一定拓扑结构的元件相依复杂系统的可靠性分析问题, 提出了一类新的元件相依系统——空间相依圆形可修系统。该系统由若干个排列成圆形的元件组成, 并且每个元件的运行依赖于空间上与之相邻的元件(“邻居”)。采用马尔可夫过程描述系统的运行过程, 定义了四元件和五元件空间相依圆形可修系统的状态, 得到了系统的状态转移率矩阵。运用 Laplace 变换方法, 给出了系统的可用度。通过数值示例说明了结论的应用, 并把上述 2 个系统的可用度与元件独立马尔可夫可修系统的可用度进行了对比。

关键词: 空间相依, 圆形系统, 马尔可夫可修系统, 可用度

中图分类号: O213.2, O211.62 文献标志码: A 文章编号: 1000-2758(2014)06-0923-06

2009年, 国际著名学者 Zio 教授在可靠性领域著名期刊《Reliability Engineering and System Safety》中的“可靠性工程: 老问题和新挑战”一文中指出“系统状态之间以及各个元件的状态之间存在的相依性, 是多状态系统建模困难的原因所在”^[1]。用什么样的方法以及如何精细描述和刻画元件之间的相依关系, 已经成为当今多状态系统可靠性建模与评估研究的热点问题。目前关于元件相依的研究主要集中在共因失效系统^[2]、马氏相依系统^[3]、冗余相依系统^[4]、序列相依系统^[5]、历史相依系统^[6-7]等方面。

一些多状态系统的元件按照需求构成一定的拓扑结构(如线、圆、二维点阵等), 并且每个元件的运行依赖于空间上与其相邻的元件(“邻居”)。如大型温控系统通常由多个风机盘管承担室内的温度调节负荷, 每个风机盘管装有温控器。当区域呈长方形且面积不大时, 把风机盘管排成 1 排, 系统呈线形拓扑结构; 当区域呈圆形且面积不大时, 通常把风机盘管排成 1 圈, 系统呈圆形拓扑结构; 当区域呈长方形且面积较大时, 通常把风机盘管排成若干行, 系统呈二维点阵拓扑结构。通常状态下, 风机盘管处于中档运行状态。如某个风机盘管发生故障, 停止运行, 相邻区域的温控器因感应到室内温度达不到要

求, 向与之相连的风机盘管发出信号。相邻区域的风机盘管将加快风机转速, 处于高档风速运行状态。从上述分析可知, 大型温控系统每个元件的运行主要和其“邻居”有相依关系, 而不是和系统中所有元件相关, 本文称这类系统为元件空间相依系统。

据我们所知, 文献中还没有关于元件空间相依系统可靠性方面的研究, 但这种空间相依关系广泛存在于供应链、道路交通网络等系统中, 有重要的研究意义。本文给出了空间相依圆形马尔可夫可修系统的数学定义。对四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统进行了可靠性分析。通过数值算例对空间相依和元件独立圆形马尔可夫可修系统的可用度进行了比较分析。

1 模型假设

1.1 基本模型

空间相依圆形马尔可夫可修系统的假设如下:

- 1) 系统由 n 个同型元件和 n 个修理工组成。 n 个同型元件排列成圆形。每个元件有 2 种状态: 正常和故障。设 n 个元件的编号分别为 $1, 2, \dots, n$, 则元件 k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) 的“邻居”为元件 $k+1$ 和 $k-$

1. 为统一起见,令 $0 = n, n + 1 = 1$ 。

2) 系统中每个元件的运行依赖于它的 2 个“邻居”。当 2 个“邻居”中有 $l (0 \leq l \leq 2)$ 处于故障状态时,元件的寿命 Y_l 的分布为 $1 - e^{-\lambda_l t} (t \geq 0)$, 其中 $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 。

3) 在初始时刻系统是新的。每个元件有专用的修理工,一旦发生故障,即刻进行维修且修复如新,修复时间为 $1 - e^{-\mu t} (t \geq 0, \mu > 0)$ 。假定所有随机变量相互独立。当所有元件都处于故障状态时,系统处于故障状态。

当 $n = 2$ 或 3 时,每个元件都是其他元件的“邻居”,本模型转化为 Yu 等^[4]提出的故障相依冗余系统。空间相依可修系统的状态即和每个元件的状态有关,又与元件之间的拓扑结构有关,较为复杂。本文仅对四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的可靠性进行分析。

1.2 四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统状态

为了区分系统的不同状态,定义状态 1: 元件正常; 状态 0: 元件故障。

用 $X^{(4)}(t) = (X_1(t), \dots, X_4(t)) (t \geq 0)$ 表示四元件空间相依圆形马尔可夫可修系统时刻 t 的状态,其中 $X_i(t) (i \in \{1, 2, 3, 4\})$ 表示时刻 t 元件 i 所处的状态,即

$$X_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{元件 } i \text{ 故障} \\ 1, & \text{元件 } i \text{ 正常} \end{cases}$$

根据上述假设系统有 2^4 个基本状态。但由于元件是同型的,并且系统的圆形结构具有对称性,一些基本状态可以合并为 1 个状态。合并情况如下: $(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)$ 都表示有 1 个元件故障,用 $(0, 1, 1, 1)$ 表示; $(0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)$ 都表示有 2 个相邻元件故障,用 $(0, 0, 1, 1)$ 表示; $(0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0)$ 都表示有 2 个元件故障,并且这 2 个故障元件之间有 1 个正常元件,用 $(0, 1, 0, 1)$ 表示; $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ 都表示有 3 个元件故障,用 $(0, 0, 0, 1)$ 表示; 总之,系统有 6 个不同的状态。如图 1 所示。

类似地,令 $X^{(5)}(t) = (X_1(t), \dots, X_5(t)) (t \geq 0)$ 表示五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统时刻 t 的状态,其中 $X_i(t) (i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ 表示时刻 t 元件 i 所处的状态。

系统的 2^5 个基本状态,可以做以下合并: $(0, 1,$

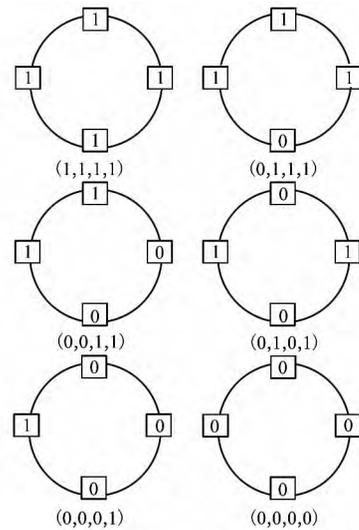


图 1 四元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的 6 种状态

$(1, 1, 1, 1)$ 表示 1 个元件故障,它代表 $(0, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1, 0)$ 5 个基本状态; $(0, 0, 1, 1, 1)$ 表示 2 个相邻元件故障,它代表 $(0, 0, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1, 1)$ 5 个基本状态; $(0, 1, 0, 1, 1)$ 表示 2 个元件故障,并且这 2 个故障元件之间有 1 个正常元件。它代表 $(0, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1, 0)$ 5 个基本状态; $(0, 0, 0, 1, 1)$ 表示 3 个相邻元件故障,它代表 $(0, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0)$ 5 个基本状态; $(0, 0, 1, 0, 1)$ 表示 3 个元件故障,其中 2 个故障元件是相邻的,另一个故障元件和 2 个相邻故障元件之间有 1 个正常元件,它代表 $(0, 0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1, 0)$ 5 个基本状态; $(0, 0, 0, 0, 1)$ 表示有 4 个元件故障,它代表 $(0, 0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)$ 5 个基本状态。系统的 8 个不同状态如图 2 所示。

由于元件的寿命和修理时间都是指数分布,并且是相互独立的, $X^{(4)}(t) = (X_1(t), \dots, X_4(t))$ 和 $X^{(5)}(t) = (X_1(t), \dots, X_5(t))$ 都是时齐马尔可夫过程。它们的状态空间分别为 $S_1 = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0)\}$, $S_2 = \{(1, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 0, 0)\}$ 。它们的工作状态集

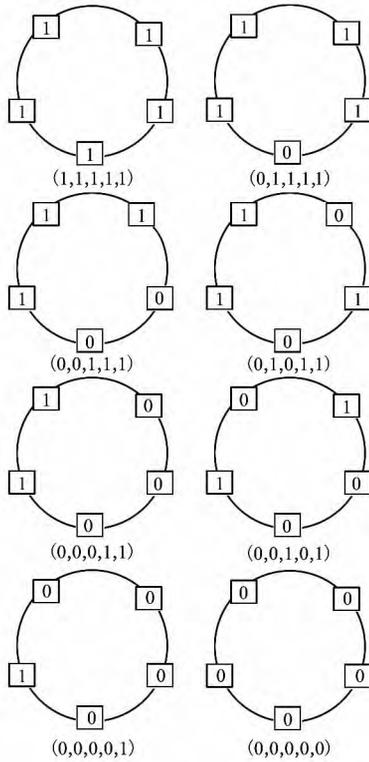


图 2 五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的 8 种状态

分别为 $W_1 = \{(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,1,0,1), (0,0,0,1)\}$, $W_2 = \{(1,1,1,1,1), (0,1,1,1,1), (0,0,1,1,1), (0,1,0,1,1), (0,0,0,1,1), (0,0,1,0,1), (0,0,0,0,1)\}$ 。

2 四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统状态转移分析

本部分将对四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统状态转移过程进行分析。

首先考虑四元件空间相依圆形马尔可夫可修系统。当系统的 4 个元件都处于正常状态时,每个元件的寿命 Y_0 的分布为 $1 - e^{-\lambda_0 t}$, 并且 4 个元件中的 1 个元件故障时,系统将有 1 个元件故障,因此系统在 Δt 时间内可从状态 $(1,1,1,1)$ 转移至状态 $(0,1,1,1)$, 转移概率为 $4\lambda_0 \Delta t$ 。由于元件的修复时间为 $1 - e^{-\mu t}$, 系统在 Δt 时间内可从状态 $(0,1,1,1)$ 转移至状态 $(1,1,1,1)$, 转移概率为 $\mu \Delta t$ 。

当系统中 1 个元件故障时,有 2 个元件和故障元

件相邻,其故障率为 λ_1 , 剩余 1 个元件的 2 个“邻居”都是工作元件,其故障率为 λ_0 , 因此在 Δt 时间内,系统可从状态 $(0,1,1,1)$ 转移至状态 $(0,0,1,1)$ 和状态 $(0,1,0,1)$, 概率分别为 $2\lambda_1 \Delta t$ 和 $\lambda_0 \Delta t$ 。2 个故障元件中的 1 个修复以后,系统将有 1 个元件故障,因此在 Δt 时间内,系统可由状态 $(0,0,1,1)$ 和状态 $(0,1,0,1)$ 转移至 $(0,1,1,1)$, 转移概率为 $2\mu \Delta t$ 。

当系统处于状态 $(0,0,1,1)$ 时,正常元件的“邻居”有 1 个正常,1 个故障,其寿命的分布为 $1 - e^{-\lambda_1 t}$, 因此在 Δt 时间内,系统可转移至状态 $(0,0,0,1)$, 转移概率 $2\lambda_1 \Delta t$ 。当系统处于状态 $(0,1,0,1)$ 时,正常元件的 2 个“邻居”处于故障状态,其寿命分布为 $1 - e^{-\lambda_2 t}$, 因此在 Δt 时间内,系统可转移至状态 $(0,0,0,1)$, 转移概率为 $2\lambda_2 \Delta t$ 。

当系统处于状态 $(0,0,0,1)$ 时,若在 Δt 时间内,与正常元件相邻的 2 个故障元件中的 1 个修复,系统将转移至状态 $(0,0,1,1)$, 转移概率为 $2\mu \Delta t$ 。与正常元件不相邻的元件修复时,系统将转移至状态 $(0,1,0,1)$, 转移概率为 $\mu \Delta t$ 。

当系统处于状态 $(0,0,0,1)$ 时,正常元件的 2 个邻居都是故障元件,其寿命的分布为 $1 - e^{-\lambda_2 t}$, 因此在 Δt 时间内,系统可转移至状态 $(0,0,0,0)$, 转移概率为 $\lambda_2 \Delta t$ 。

当 4 个故障元件中的 1 个在 Δt 时间内修复时,系统由状态 $(0,0,0,0)$ 转移至状态 $(0,0,0,1)$, 转移概率为 $4\mu \Delta t$ 。

综上,系统在 Δt 时间内的状态转移过程如图 3 所示。为了简便,在图 3 中略去了系统停留在原状态的概率。

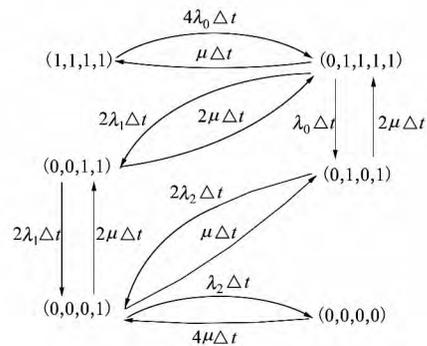


图 3 四元件空间相依圆形马尔可夫可修系统状态转移图

把系统状态作如下排序: $(1,1,1,1), (0,1,1,$

1) , (0 0 1 1) , (0 1 0 1) , (0 0 0 1) , (0 0 0 , 0) 则由图 3 可得系统的转移率矩阵:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -4\lambda_0 & 4\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - 2\lambda_1 - \lambda_0 & 2\lambda_1 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - 2\lambda_1 & 0 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & -2\mu - 2\lambda_2 & 2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & \mu & -3\mu - \lambda_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu & -4\mu \end{pmatrix}$$

类似地,可对五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统进行状态转移分析,其状态转移如图 4 所示。

把系统状态做如下排序: (1, 1, 1, 1, 1) , (0, 1, 1, 1, 1) , (0, 0, 1, 1, 1) , (0, 1, 0, 1, 1) , (0, 0, 0, 1, 1) ,

(0 0 1 0 1) , (0 0 0 0 1) , (0 0 0 0 0) ,由图 4 可得五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的转移率矩阵:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} -5\lambda_0 & 5\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu - 2\lambda_0 - 2\lambda_1 & 2\lambda_1 & 2\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu - \lambda_0 - 2\lambda_1 & 0 & 2\lambda_1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 & -2\mu - \lambda_2 - 2\lambda_1 & \lambda_2 & 2\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & \mu & -3\mu - 2\lambda_1 & 0 & 2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 2\mu & 0 & -3\mu - 2\lambda_2 & 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 2\mu & -4\mu - \lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\mu & -5\mu \end{pmatrix}$$

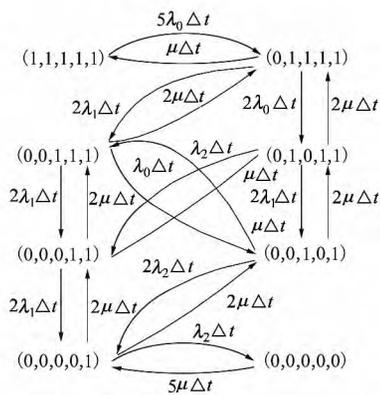


图 4 五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统状态转移图

3 四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统可用度

假设 $P_1(t)$ $P_2(t)$ 分别表示四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统 t 时刻的状态概率向量,则它们满足微分方程组(参见文献[8]):

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = P_i(t) Q_i \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

由于在初始时刻系统是新的,上述微分方程的初始条件为:

$$P_1(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

$$P_2(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

对方程组(1)两边做拉普拉斯变换,得:

$$P_i^*(s) = P_i(0) (sI - Q_i)^{-1} \quad (2)$$

式中: $P_i^*(s)$ 为 $P_i(t)$ 的拉普拉斯变换。

用 $A_1(t)$ 和 $A_2(t)$ 分别表示四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫系统在 t 时刻的瞬时可用度,即系统处于工作状态的概率。由等式(2)和系统假设可得 $A_i(t)$ ($i = 1, 2$) 的拉普拉斯变换:

$$A_i^*(s) = P_i(0) (sI - Q_i)^{-1} \mu_i \quad (3)$$

式中: $\mu_1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)^T$ $\mu_2 = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0)^T$ 。对 $A_i^*(s)$ 做逆拉普拉斯变换可得 $A_i(t)$ 。

为求系统的稳态可用度分别解方程组

$$\begin{cases} \pi_1 Q_1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \pi_1 e_1 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

和

$$\begin{cases} \pi_2 Q_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ \pi_2 e_2 = 1 \end{cases} \quad (5)$$

式中: e_1 和 e_2 为所有分量都为 1 的 6 维和 8 维列向量。四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的稳态可用度 $A_1 = \pi_1 e_1$ $A_2 = \pi_2 e_2$ 。

4 数值算例

考虑一个由四个元件和四个修理工组成的空间相依圆形马尔可夫可修系统。假设每个元件的修理时间分布为 $1 - e^{-1/2t} (t \geq 0)$ 。当 1 个元件的 2 个“邻居”中有 0, 1 和 2 处于故障状态时, 其寿命分布分别为 $1 - e^{-1/4t}$, $1 - e^{-t}$ 和 $1 - e^{-2t} (t \geq 0)$ 。把 $\mu = 1/2$ $\lambda_0 = 1/4$ $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2$ 代入相关表达式, 用 Matlab 软件做拉普拉斯和逆拉普拉斯变换可得系统的瞬时可用度 $A_1(t)$, 其图像如图 5 所示。把方程组 (4) 的解代入 A_1 的表达式, 可得稳态可用度为 0.673 2。

为了进行对比分析, 考虑元件的寿命和修复时间分别为 $1 - e^{-1/4t}$ 和 $1 - e^{-1/2t} (t \geq 0)$ 的四元件独立圆形马尔可夫可修系统。用类似于四元件并联马尔可夫可修系统可靠性分析的方法, 可得其瞬时可用度 $\bar{A}_1(t)$, 其图像如图 5 所示。稳态可用度 $\bar{A}_1 = 0.987 7$ 。

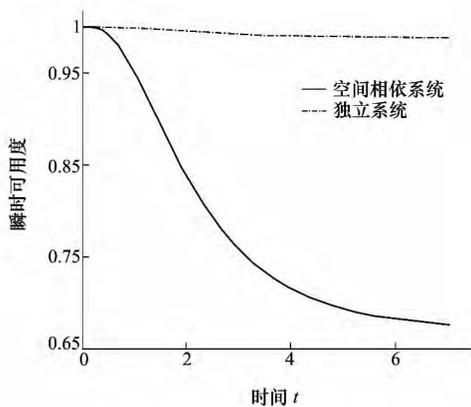


图 5 四元件独立和空间相依圆形马尔可夫可修系统瞬时可用度曲线

类似地, 考虑由 5 个元件和 5 个修理工组成的空间相依和独立圆形马尔可夫可修系统, 并假设元件的寿命和修复时间与相应的四元件系统相同。用类似于四元件系统可靠性分析的方法可得他们的瞬

时可用度 $A_2(t)$ 和 $\bar{A}_2(t)$, 其图像如图 6 所示。它们的稳态可用度 $A_2 = 0.751 0$ $\bar{A}_2 = 0.995 9$ 。

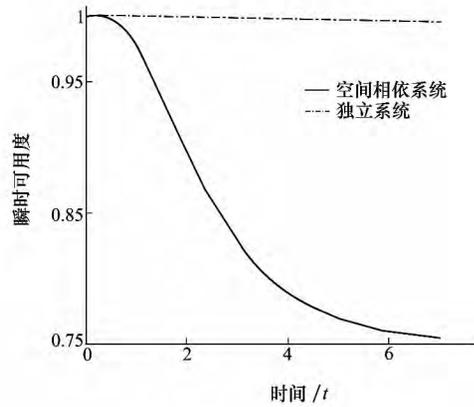


图 6 五元件独立和空间相依圆形马尔可夫可修系统瞬时可用度曲线

空间相依与独立圆形马尔可夫可修系统可用度曲线对比表明: 在元件寿命和修复时间分别相同的条件下, 空间相依圆形马尔可夫可修系统的可用度低于元件独立圆形马尔可夫可修系统, 并且空间相依系统需要更长的时间才能趋于稳态; 四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统可用度曲线对比表明: 在元件寿命和修复时间分别相同的条件下, 四元件空间相依圆形马尔可夫可修系统的可用度更低一些。

5 结 论

本文建立了空间相依圆形马尔可夫可修系统模型。运用概率分析、拉普拉斯变换方法和马尔可夫过程理论对四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统进行了可靠性分析, 得到了它们的瞬时和稳态可用度。数值算例表明: 空间相依系统的可用度低于元件独立系统。本文首次考虑了拓扑结构对元件间相依关系的影响, 有重要的理论和应用价值。

本文仅对四元件和五元件空间相依圆形马尔可夫可修系统进行了可靠性分析。在进一步研究中, 可考虑 n 元件空间相依圆形马尔可夫可修系统可靠性度量问题。也可考虑其他结构下(如线、二维点阵等)空间相依系统建模与可靠性研究问题。

参考文献:

- [1] Zio E. Reliability Engineer: Old Problems and New Challenges [J]. Reliability Engineer and System Safety, 2009, 94: 125-141
- [2] Li C Y, Chen X, Yi X S, Tao J Y. Heterogeneous Redundancy Optimization for Multi-State Serres-Parallel Systems Subject to Common Cause Failures [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2010, 95: 202-207
- [3] Xiao G, Li Z Z. Estimation of Dependability Measures and Parameter Sensitivities of a Consecutive k -Out-of- n : F Repairable System with $(k-1)$ -Step Markov Dependence by Simulation [J]. IEEE Trans. Reliability, 2008, 57: 71-83
- [4] Yu H Y, Chu C B, Chatelet E, Yalaoui F. Reliability Optimization of a Redundant System with Failure Dependencies [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2007, 92: 1627-1634
- [5] Xing L D, Shrestha A, Dai Y S. Exact Combinatorial Reliability Analysis of Dynamic Systems with Sequence-Dependent Failures [J]. Reliability Engineering and System Safety, 2011, 96: 1375-1385
- [6] Cui L R, Li H J, Li J L. Markov Repairable Systems with History-Dependent up and down States [J]. Stochastic Models, 2007, 23: 665-681
- [7] Wang L Y, Cui L R. Aggregated Semi-Markov Repairable Systems with History-Dependent up and down States [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2011, 53: 883-895
- [8] 曹晋华 程侃. 可靠性数学引论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006
Cao Jinhua, Cheng Kan. Introduction to Reliability Mathematics [M]. Beijing, Higher Education Press, China, 2006 (in Chinese)

Reliability Analysis of Circular Markov Repairable Systems with Spatial Dependence

Wang Liying¹, Si Shubin²

(1. Department of Mathematics & Physics, Shijiazhuang Tiedao Institute, Shijiazhuang, 050045, China)
(2. School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aim. The introduction of the full paper reviews a number of papers on reliability models with dependent units in the open literature and proposes what we believe to be a new model mentioned in the title. The core of Section 1 consists of: (1) we present the assumptions of the circular Markov repairable systems with spatial dependence; (2) we put forward the Markov processes associated with the 4-unit and 5-unit circular Markov repairable systems with spatial dependence and define their states as indicated in Fig.1 and Fig. 2. Section 2 analyzes the state transitions of the 4-unit and 5-unit systems and obtains the state transition rate matrices corresponding to them. Section 3 discusses the instantaneous and asymptotic availabilities of the 4-unit and 5-unit systems, which are given by equations (3)-(5). Section 4 presents the numerical examples of the 4-unit and 5-unit systems. The curves of instantaneous availabilities are shown in Fig. 5 and Fig. 6. We obtain the conclusions that: (1) the system with independent units is more reliable than the circular Markov repairable system with spatial dependence; (2) the 5-unit circular Markov repairable system is more reliable than the 4-unit system.

Key words: availability, differential equations, inverse problems, Laplace transforms, Markov processes, mathematical models, MATLAB, matrix algebra, probability, reliability analysis; circular system, Markov repairable system, spatial dependence.