# 圆形悬挂轨道的二阶非线性扰动修正

刘 蕾，和兴锁，闫业毫

（西北工业大学 工程力学系，陕西 西安 710129）

**摘 要：**基于动力学原理，首先建立了圆形悬挂轨道的相对运动动力学模型，然后在 C-W 方程考虑非线性扰动情况下，推导出圆形悬挂轨道基于二阶非线性扰动的运动方程，分析研究了非线性因素对悬挂轨道的影响，并给出了具体的修正方法。仿真结果表明，基于相对运动条件下，对圆形悬挂轨道进行的二阶非线性修正消除了 *Y*-bar 方向上的长期扰动，为今后的研究奠定了理论基础。

**关 键 词：**悬挂轨道，非线性，相对运动，动力学分析，模型分析
**中图分类号：**V412 **文献标识码：**A **文章编号：**1000-2758(2013)04-0629-04

“悬挂轨道”在空间操作任务中具有非常广阔的应用前景[1,2]。目前针对悬挂轨道的研究，大部分是在参考卫星为圆轨道的前提下展开研究的。文献[3,4]研究相对于圆轨道参考卫星在径向的正上方或正下方实现悬挂的方法。文献[5]利用几何方法研究相对圆轨道参考卫星在任意位置实现悬挂的一般方法。以上研究工作均未考虑非线性扰动对悬挂轨道的影响，从而对悬挂轨道的研究会产生一定的误差。本文基于动力学原理，对圆形悬挂轨道进行的二阶非线性修正消除了 $Y$ 方向上的长期扰动，为进一步深入研究悬挂轨道提供了良好的条件。

本文首先研究了圆形悬挂轨道的相对运动模型，然后给出了圆形悬挂轨道基于二阶非线性扰动的运动方程以及具体的修正方法，最后进行仿真验证。

## 1 悬挂轨道建模

### 1.1 相对运动的动力学模型

记 $T$ 为参考航天器，$C$ 为伴随航天器。$OXYZ$ 为地心惯性坐标系。设 $T$ 在近圆轨道上运动，$T$-$xyz$ 为参考航天器的轨道坐标系，其原点与参考航天器的质心固联并随其沿轨道运动，$x$ 轴与参考航天器的地心矢量 $\boldsymbol{r}_T$ 重合。参考航天器 $T$ 的轨道动力学方程的极坐标形式为[6]：

$$\begin{cases}\ddot{\boldsymbol{r}}_T - \boldsymbol{r}_T\dot{\theta}_T^2 + \dfrac{\mu}{r_T^2} = 0\\ \boldsymbol{r}_T\ddot{\theta}_T + 2\dot{\boldsymbol{r}}_T\dot{\theta}_T = 0\end{cases}$$

式中，$\theta_T$ 为轨道相位角，$\boldsymbol{r}_T = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为参考航天器轨道半径，$\mu$ 为地球引力常数。

设伴随航天器的地心位置矢量为 $\boldsymbol{r}_C$，则其相对于参考航天器的位置矢量 $\rho$ 为

$$\rho = \boldsymbol{r}_C - \boldsymbol{r}_T = (x,y,z)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

为了建立伴随航天器与参考航天器在动坐标 $T$-$xyz$ 中的相对运动方程，有

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\delta^2\boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{n}\times\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} \tag{2}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{n}$ 分别为动坐标系的旋转角加速度矢量和角速度矢量，$\dfrac{\delta^2\boldsymbol{\rho}}{\delta t^2}$、$\dfrac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}$ 分别为伴随航天器与参考航天器在动坐标系中的相对加速度矢量和相对速度矢量，即

$$\frac{\delta^2\boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} = \begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{bmatrix}\quad\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} = \begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} \tag{3}$$

### 1.2 悬挂轨道动力学建模

空间飞行器 $B$ 始终在空间飞行器 $A$ 的下方，保

收稿日期：2012-11-08
作者简介：刘 蕾(1988—)，女，西北工业大学硕士研究生，主要从事航天器动力学与控制的研究。

持同步飞行，如图1所示。此时，这两个空间飞行器的运行周期相等，瞬时运行角速度相等，空间飞行器 $B$ 运行的轨道称为悬挂轨道。因此 $\boldsymbol{\rho}$ 应满足

$$\boldsymbol{\rho} = (-d,0,0)^{\mathrm{T}} = -d\boldsymbol{i}$$

式中，$d$ 悬挂轨道两航天器之间的距离。

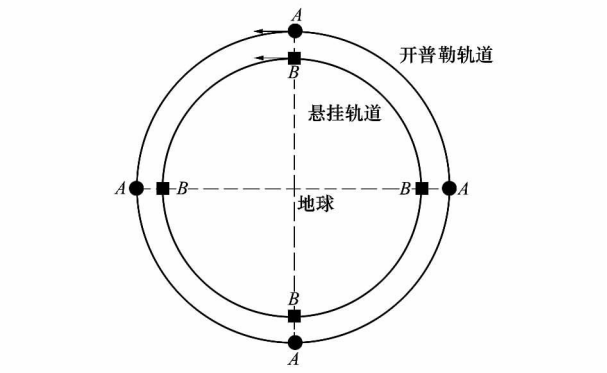



图1 悬挂轨道示意图

则由(1)式知

$$\boldsymbol{r}_C = \boldsymbol{r}_T + \boldsymbol{\rho} = (\boldsymbol{r}_T - d)\boldsymbol{i}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} + \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\rho} \tag{4}$$

要实现悬挂，参考航天器与伴随航天器的角速度应相等，即 $n_C = n_T = n$，则

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\rho} = \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 \\ n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$$

又

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_C}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}r_T}{\mathrm{d}t} = n(r_C - r_T)\boldsymbol{j} = -nd\boldsymbol{j}$$

故

$$\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\rho} = -nd\boldsymbol{j} - (-nd\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{0}$$

因此，当 $\boldsymbol{\rho} = (-d,0,0)^{\mathrm{T}}$ 时

$$\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r_C^3}\boldsymbol{r}_C + \frac{\mu}{r_T^3}r_T = \begin{bmatrix} -\mu\left(\dfrac{1}{r_C^2} - \dfrac{1}{r_T^2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

则(5)式可简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2\mu d}{r_T^3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2n^2 d \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{n}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} -\dot{n}y \\ \dot{n}x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\rho}) = -n^2\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} 2\boldsymbol{n}\times\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t} = 2\begin{bmatrix} -n\dot{y} \\ n\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

故(2)式等效为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t^2} = \begin{bmatrix} \ddot{x} - \dot{n}y - n^2x - 2n\dot{y} \\ \ddot{y} + \dot{n}x - n^2y + 2n\dot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

假设 $a_x$ 为实现悬挂轨道所施加的控制力加速度

$$\boldsymbol{a}_x = \begin{bmatrix} f_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中

$$f_x = \left(\frac{\mu}{r_C^3} - \frac{\mu}{r_T^3}\right)(r_T - d)$$

$$= 3n^2 d \qquad \left(\frac{r_T}{r_C} - 1 \ll 0\right) \tag{6}$$

至此，给出了悬挂轨道的实现途径，即首先调整参考航天器运行轨道，使其与伴随航天器运行轨道面共面，但伴随航天器的轨道半径应低于参考航天器的轨道半径，然后当参考航天器自由漂移到伴随航天器正下方时，此时施加的脉冲控制力见(6)式。

## 2 非线性修正方法

针对C-W方程考虑非线性扰动，其控制微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = -\dfrac{\mu(r_T + x)}{[(r_T + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{\mu}{r_T^2} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = -\dfrac{\mu y}{[(r_T + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ \ddot{z} = -\dfrac{\mu z}{[(r_T + x)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

式中，$r_T$ 为参考航天器的轨道半径，参考航天器的

平均角速度为 $n = \sqrt{\frac{\mu}{r_T^3}}$; 对方程的右边进行泰勒级数展开,保留其二阶项,可化为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} - 3n^2x = \varepsilon\left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} - x^2\right) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = \varepsilon xy \\ \ddot{z} + n^2z = \varepsilon xz \end{cases} \tag{7}$$

此方程可视为 C-W 摄动方程,其中 $\varepsilon = \frac{3\mu}{r_c^4}$ 为摄动参数。

令 $x_h, y_h, z_h$ 为 C-W 方程的非扰动解,假设(7)式有以下形式的解

$$\begin{aligned} &x = x_h + \varepsilon x_{cn}, \dot{x} = \dot{x}_h + \varepsilon \dot{x}_{cn}, \ddot{x} = \ddot{x}_h + \varepsilon \ddot{x}_{cn} \\ &y = y_h + \varepsilon y_{cn}, \dot{y} = \dot{y}_h + \varepsilon \dot{y}_{cn}, \ddot{y} = \ddot{y}_h + \varepsilon \ddot{y}_{cn} \\ &z = z_h + \varepsilon z_{cn}, \dot{z} = \dot{z}_h + \varepsilon \dot{z}_{cn}, \ddot{z} = \ddot{z}_h + \varepsilon \ddot{z}_{cn} \end{aligned} \tag{8}$$

将(8)式代入(7)式得到了扰动变量替代之后的方程

$$\begin{cases} \ddot{x}_{cn} - 2n\dot{y}_{cn} - 3n^2x_{cn} = \frac{\left(y_h^2 + z_h^2 - 2x_h^2\right)}{2} \\ \ddot{y}_{cn} + 2n\dot{x}_{cn} = x_h y_h \\ \ddot{z}_{cn} + n^2 z_{cn} = x_h z_h \end{cases} \tag{9}$$

将 $(x_h, y_h, z_h)^{\mathrm{T}} = (-d, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 代入(9)式得

$$\begin{cases} \ddot{x}_{cn} - 2n\dot{y}_{cn} - 3n^2x_{cn} = -d^2 \\ \ddot{y}_{cn} + 2n\dot{x}_{cn} = 0 \\ \ddot{z}_{cn} + n^2 z_{cn} = 0 \end{cases}$$

方程可转化为以下形式[6]

$$\dot{\boldsymbol{X}}_{cn} = A_h \boldsymbol{X}_{cn} + B\boldsymbol{u}_h$$

方程(9)是一组线性非齐次常微分方程组,齐次解的状态转移矩阵与 C-W 方程的状态转移矩阵一致,见参考文献[7]。方程(9)的一般解可写为

$$\boldsymbol{X}_{cn}(t) = \Phi_h(t)\boldsymbol{X}_{cn}(0) + \int_0^t \Phi_h(t-\tau)B\boldsymbol{u}_h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

对此方程求解可得

$$\begin{cases} x_{cn}(t) = (4 - 3\cos nt)x_{cn}(0) + \frac{\sin nt}{n}\cdot\dot{x}_{cn}(0) + \\ \quad \frac{2(1-\cos nt)}{n}\dot{y}_{cn}(0) - \frac{d^2}{n^2}(1-\cos nt) \\ y_{cn}(t) = 6(\sin nt - nt)x_{ch}(0) + y_{cn}(0) + \\ \quad \frac{2(\cos nt - 1)}{n}\dot{x}_{cn}(0) + \\ \quad \left(\frac{4}{n}\cdot\sin nt - 3t\right)\dot{y}_{cn}(0) - \frac{d^2}{n}\left(\frac{2\sin nt}{n} - t\right) \\ z_{cn}(t) = \cos nt z_{cn}(0) + \frac{\sin nt}{n}\cdot\dot{z}_{cn}(0) \end{cases}$$

综上可知,上述方程有 3 种形式的偏差项: ①常数偏差项; ②长期项; ③谐波项。而长期项由于能引起 C-W 方程解的非线性扰动,故被重点考虑,且其仅出现在沿 $Y$ 轴方向。因此对非线性问题零长期增长的弱标准化为

$$-6nx_{cn}(0) - 3\dot{y}_{cn}(0) + \frac{d^2}{n} = 0$$

以下任意选择扰动变量初始条件满足指定的标准

$$x_{cn}(0) = 0, \dot{y}_{cn}(0) = \frac{d^2}{3n}$$

因此,所需的初始扰动状态向量为

$$\boldsymbol{X}_{cn} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{d^2}{3n} \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}}$$

这个初始条件修正称为基本的非线性修正。

## 3　仿真验证

参考航天器为地球静止轨道,即轨道半径 $r_0 = 42\,164.169$ km,轨道角速度为 $\dot{\theta}_0(0) = 7.292 \times 10^{-5}$ rad/s; 伴随航天器与参考航天器运行在同平面的圆轨道上,伴随航天器高度低于参考航天器 42.164 km,$\dot{\theta}_1(0) = 7.303 \times 10^{-5}$ rad/s 为相应的轨道角速度。

按照上述计算方法,伴随航天器的持续推力加速度为 $F_r = 6.733 \times 10^{-4}$ m/s$^2$, $\Delta v_t = -4.613$ m/s 为初始时刻所需的切向脉冲速度增量。由仿真结果可知,初始条件的扰动解在两个副系中都是有界的,在 $X$ 和 $Y$ 方向有小但恒定的偏差,扰动解在 $X$ 方向上消除了部分的偏差项,但它在 $Y$ 方向上很好地消除了长期偏差项,使其在一定范围内呈周期性波动。

仿真研究表明,悬挂轨道相对运动方程解的非线性扰动对悬挂轨道的影响很大,通过对非线性扰动进行修正,可以最大程度减弱长期偏移量对悬挂轨道的影响。

## 4　结　论

悬挂轨道为空间操作(在轨维修,空间攻防等)任务提供了新的技术手段。本研究给出了悬挂轨道相对运动的非线性扰动对悬挂轨道的影响及对其的修正。按照上述方法设计的修正方程与常规的极坐标方程相比,更容易建立运动方程,仿真也更易实

现。仿真证明了该方法的正确性和有效性。结果表明:通过对非线性扰动的修正可以很好的修正长期偏移量对悬挂轨道的影响。

## 参考文献:


[1] 袁建平,朱战霞. 空间操作与非开普勒运动. 宇航学报,2009,30(1):42-46
Yuan Jianping, Zhu Zhanxia. Space Operations and Non-Keplerian Orbit Motion. Journal of Astronautics, 2009,30(1):42-46 (in Chinese)

[2] 王 萍,袁建平,范剑锋. 关于非开普勒轨道的讨论. 宇航学报,2009,30(1):37-41
Wang Ping, Yuan Jianping, Fan Jianfeng. A Discussion on Non-Keplerian Orbit. Journal of Astronautics, 2009, 30(1): 37-41 (in Chinese)

[3] 林来兴,黎 康. 卫星对空间目标悬停的轨道动力学与控制方法研究. 中国空间科学技术,2008,28(2):9-12
Lin Laixing, Li Kang. Orbit Dynamics and Control of Satellites Hovering over Space Target. Chinese Space Science and Technology, 2008,28(2):9-12 (in Chinese)

[4] Broschart S B, Scheeres D J. Control of Hovering Spacecraft near Small Bodies: Application to Asteroid 25143 Itokawa. Journal of Guidance,Control and Dynamics, 2005, 28(2): 343-354

[5] 闫 野. 卫星相对空间目标任意位置悬停的方法研究. 中国空间科学技术, 2009, 29(1): 1-5
Yan Ye. Study of Hovering Method at Any Selected Position to Space Target. Chinese Space Science and Technology, 2009, 29(1):1-5 (in Chinese)

[6] Sesha S Vaddi, Srinivas R Vadali. Formation Flying: Accommodating Nonlinearity and Eccentricity Perturbations, 2003, 26(2)

[7] Karlgaard C D, Lutze F H. Second-Order Relative Motion Equations. American AstronauticalSociety,AAS Paper 01-474, 2001


# Second-Order Nonlinear Perturbation Correction of Circular Suspension Orbit


Liu Lei, He Xingsuo, Yan Yehao

(Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polytechnical University, Xi´an 710129, China)



**Abstract:** A relative motion dynamics model based on the circular suspension orbit is established in this paper, we deduce the motion equations of second-order nonlinear perturbation in the C-W equation. Then the effect of nonlinear factors on the suspension orbit is analysed and studied based on the equations. Finally we present a method for implementing the second-order nonlinear perturbation correction of circular suspension orbit. The simulation results and their analysis show preliminarily that, under the condition of relative motion, the second-order nonlinear correction of the circular suspension orbit can eliminate the long-term perturbation in the Y-bar direction and is, we believe, of some help in future research.



**Key words:** computer simulation, dynamics, equations of motion, errors, mathe-matical models, orbits, satellites; orbit dynamics, relative motion, second-order nonlinear perturtation, circular suspension orbit