基于高阶位移场理论的多孔金属圆柱壳结构响应研究

张 凯[1]，邓子辰[1,2]，王 博[1]

(1. 西北工业大学 力学与土木建筑学院，陕西 西安 710072
2. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室，辽宁 大连 116024)

摘 要: 基于高阶位移场理论研究了简支条件棱镜型圆柱壳体在内压力作用下的结构响应。首先，建立承受内压圆柱壳体的平衡方程，计算在该载荷作用下的各项同性材料的响应，与弹性力学理论解进行对比，验证所得平衡方程的正确性。采用均匀化方法，将正方形，三角形和 Kagome 3 种多孔金属圆柱壳体等效为正交各向异性的材料，计算了在内压下的结构响应，并与有限元计算结果进行对比，结果表明文中方法所得结果与有限元的结果非常接近，计算得到的径向位移和轴向应变与有限元的计算基本相同，径向应力，环向应力和径向应变等结构响应时误差也较小。3 种构型的计算结果与有限元计算结果的比值变化趋势基本相同，其中三角形和 Kagome 构型的计算结果较正方形构型的计算结果较为准确。通过对所得结果进行分析，可以发现该高阶位移场理论在计算圆柱壳体结构响应时有效、准确，可以作为预测该类结构响应的计算方法。

关 键 词: 高阶位移场，正交各向异性，圆柱壳，多孔金属材料
中图分类号: O347.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2758(2013)04-0624-05

多物理场服役和复杂工况作用下，传统的金属构件已不能满足结构强度，降噪隔声，主动散热等多功能设计要求。新型复合材料和超轻多孔金属材料以其高比强度、高效散热、多功能集成等良好性能，成为近年来学术界关注的热点。如何准确而高效地对这类结构进行简化，建模和理论计算成为最需要解决的问题。由铁木辛柯梁理论发展而来的梅林板[1]理论，计算均匀材料板、壳，以及各向异性板和层合板的结构响应。在计算层合板结构响应时，通常将层合板简化为单层板，采用高阶位移场计算其结构响应。由计算精度较低的{1,0}阶位移场理论发展而来的{3,0}阶[2]和{1,2}阶[3]理论，可用于计算厚板壳的结构响应，并提供了较为精确的计算结果。Cook 和 Tessler[4,5]由{1,2}阶理论提出的{3,2}阶理论，引入了轴向的非线性项，可得到精确的轴向位移和应力。Mantari[6]采用了一种新型的高阶剪切变形理论计算了层合板和三明治板的静、动态响应。Cetkovic[7]采用了一种分层的位移模式，研究了层合板的振动问题。

综上所述，大量的研究针对平板结构，而针对圆柱壳体结构的研究较少。本文针对承受内压的棱镜型圆柱壳体结构的结构响应进行研究。将棱镜型多孔金属材料等效为正交各向异性的材料，引入{3,2}阶的高阶位移场理论，计算结构位移和应变等响应，并通过有限元计算验证本文方法的可靠性。

1 圆柱壳体的平衡方程及其求解

1.1 {3,2}阶位移场

如图 1 所示，选取圆柱壳体中线为坐标原点，上、下面板的厚度均为 h，圆柱壳横截面圆心到坐标原点的半径为 R。设沿中线的方向为 x，沿径向的方向为 z。

基于{3,2}高阶位移理论构造位移场，轴向位

收稿日期: 2012-10-10 基金项目: 国家基础研究计划 973 项目(2011CB610300)、国家自然科学基金(11172239)、高校博士点基金(20126102110023)、大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放基金和“111”引智计划项目(B07050)资助
作者简介: 张 凯(1983—)，西北工业大学博士研究生，主要从事多孔材料结构设计与优化研究。

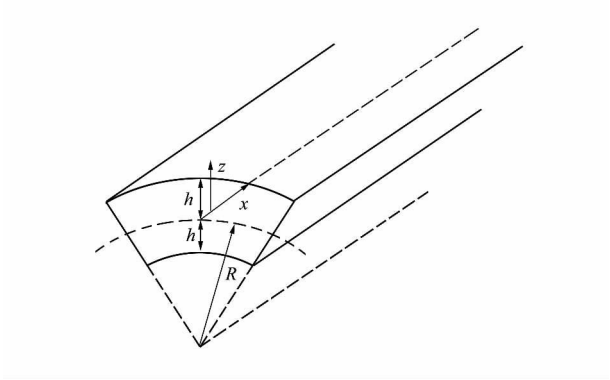


图 1　坐标及尺寸示意图

移 $u_x(x,z)$ 和径向位移 $u_z(x,z)$ 可以表示为

$$\begin{cases} u_x(x,z) = u(x) + h\zeta\phi_x(x) - \\ \quad \dfrac{h}{6}(3\zeta^2-1)\dfrac{\partial w_1(x)}{\partial x} - h\zeta\left(\dfrac{1}{3}\zeta^2-\dfrac{1}{5}\right)\gamma \\ u_z(x,z) = w(x) + \zeta w_1(x) + \left(\zeta^2-\dfrac{1}{5}\right)w_2(x) \end{cases} \tag{1}$$

式中 $\gamma = \dfrac{5}{4}\left(\phi_x(x) + \dfrac{\partial w(x)}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial w_2(x)}{\partial x}$，$u(x)$ 是圆柱壳体中面沿 x 轴的位移，$\phi_x(x)$ 是圆柱壳绕环向的转角，$w(x)$ 是横向加权位移，$w_1(x)$，是描述中面翘曲的函数。由弹性力学理论，得到轴向应变和环向应变的表达式

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = u_{x,x}(x,z) = \varepsilon_{x0}\varphi_1 + \kappa_{x0}\varphi_2 + \varepsilon_H\varphi_3 + \kappa_H\varphi_4 \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{u_z(x,z,t)}{R+z} = \dfrac{1}{R+z}\left[w + z\dfrac{w_1}{h} + \left(\dfrac{z^2}{h^2}-\dfrac{1}{5}\right)w_2\right] \\ \quad = \varepsilon_{\theta0}\varphi_5 + \varepsilon_{z0}\varphi_6 + \kappa_{z0}\varphi_7 \end{cases} \tag{2}$$

式中

$$(\varepsilon_{x0},\varepsilon_H,\varepsilon_{\theta0},\varepsilon_{z0}) = \left[u_{,x},\ hw_{1,x},\ \frac{w}{R},\ \frac{w_1}{h}\right],(\kappa_{x0},\kappa_H,$$

$$\kappa_{z0}) = \left[\phi_{x,x},\ \frac{5}{4}(\phi_{x,x}+w_{,xx}) + w_{2,xx},\ \frac{w_2}{h^2}\right]$$

$$(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4,\varphi_5,\varphi_6,\varphi_7) = \left[1,\ h\zeta,\ \frac{1}{6}-\frac{\zeta^2}{2},\right.$$

$$\left. h\left(\frac{\zeta}{5}-\frac{\zeta^3}{3}\right),\ \frac{R}{R+z},\ \frac{z}{R+z},\ \frac{1}{R+z}h^2\left(\frac{z^2}{h^2}-\frac{1}{5}\right)\right],$$

$\zeta = \dfrac{z}{h}$。

1.2　应力应变关系及其改进

对于各项同性或者正交各向异性材料，材料的本构关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

通常来讲，对于承受机械荷载的圆柱壳体，径向应力可表示为径向位移的三次方。即设径向应力为

$$\sigma_{zz} = \sum_{n=0}^{3}\sigma_{zi}(\zeta_i)^n \tag{4}$$

由于圆柱壳体上、下表面的径向应力对径向 z 的一阶微分为零，由(4) 式得到径向应力为

$$\sigma_{zz} = \sigma_{z0} + \sigma_{z1}\varphi \tag{5}$$

式中 $\varphi = \zeta - \dfrac{1}{3}\zeta^3$。将(3) 式中的径向应变改写为由轴向应变，环向应变以及径向应力的表达形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & R_{13} & 0 \\ \hat{C}_{12} & \hat{C}_{22} & R_{23} & 0 \\ -R_{13} & -R_{23} & S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{6}$$

式中，$\hat{C}_{ij} = C_{ij} - R_{i3}C_{j3}$，$R_{i3} = C_{i3}S_{33}$，$S_{33} = \dfrac{1}{C_{33}}$。由径向应变和径向位移对 z 一阶微分必然满足最小二乘关系，可以确定 σ_{z0} 和 σ_{z1} 的值，即

$$U = \min\int_{-h}^{h}[\varepsilon_{zz} - u_{z,z}]^2\mathrm{d}z \tag{7}$$

将 σ_{z0} 和 σ_{z1} 视为自变量，得到 σ_{z0} 和 σ_{z1} 的表达式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{z0} \\ \sigma_{z1} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{P}[\varepsilon_{x0}\quad \kappa_{x0}\quad \varepsilon_H\quad \kappa_H\quad \varepsilon_{\theta0}\quad \varepsilon_{z0}\quad \kappa_{z0}]^{\mathrm{T}} \tag{8}$$

式中

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{S}]^{-1}[\boldsymbol{J}],\ [\boldsymbol{S}] = \int_{-h}^{h}\begin{bmatrix} S_{33}^{\ 2} & S_{33}^{\ 2}\varphi \\ S_{33}^{\ 2}\varphi & S_{33}^{\ 2}\varphi^2 \end{bmatrix}\mathrm{d}z$$

$$[\boldsymbol{J}] = \int_{-h}^{h}\begin{bmatrix} R_{13}\varphi_1 & R_{13}\varphi_2 & R_{13}\varphi_3 & R_{13}\varphi_4 & R_{23}\varphi_5 & R_{23}\varphi_6+1 & R_{23}\varphi_7+2z \\ R_{13}\varphi\varphi_1 & R_{13}\varphi\varphi_2 & R_{13}\varphi\varphi_3 & R_{13}\varphi\varphi_4 & R_{23}\varphi\varphi_5 & (R_{23}\varphi_6+1)\varphi & (R_{23}\varphi_7+2z)\varphi \end{bmatrix}S_{33}\,\mathrm{d}z$$

1.3 控制方程及其求解

由以上得到的应力和应变项，可以得到结构的应变能

$$W = \int_V \bar{w}^* \, \mathrm{d}V = \pi \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \, \mathrm{d}x \tag{9}$$

设该圆柱壳体承受均布内压载荷 q_0，因此在载荷作用下，外力所做的功为

$$W_e = \int_S q_0 u_z(x, R_{\mathrm{in}}) \, \mathrm{d}s \tag{10}$$

由哈密顿原理，对5个位移分量进行变分，得到控制方程

$$\boldsymbol{Lu} = (R - H)\begin{bmatrix} 0 & 0 & q_0 & -q_0 & \frac{4}{5}q_0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

式中 $\boldsymbol{L}$ 是 5×5 的偏微分算子矩阵，位移变量 $\boldsymbol{u} = [u \quad \varphi x \quad w \quad w_1 \quad w_2]^{\mathrm{T}}$。对于简支边界条件的圆柱壳体，边界条件可以描述为：$w = w_1 = w_2 = 0$，$N_x = M_x = 0$。设位移模式为：$u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m \cos(\lambda_m x)$，$\phi_x = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m \cos(\lambda_m x)$，$w = \sum_{m=1}^{\infty} W_m \sin(\lambda_m x)$，$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m} \sin(\lambda_m x)$，$w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m} \sin(\lambda_m x)$，其中 $\lambda_m = \frac{m\pi}{L}$。值得注意的是，位移模式恒满足简支边界。将位移模式代入(11)式，利用伽辽金原理，得到平衡方程，求解得到 U_m，Φ_m，W_m，W_{1m}，W_{2m} 5个位移幅值，并代入位移模式和(1)式得到位移 u_x 和 u_z，将位移代入(2)式、(5)式和(6)式得到应力和应变。

2 平衡方程的验证

由弹性力学理论可知，对于各项同性，承受内压圆柱壳体，径向应力可表示为 $\sigma_\rho = -q_0 [(R/\rho)^2 - 1] / [(R/r)^2 - 1]$，设圆柱壳体为各项均匀材料，横截面圆心到坐标原点的半径 $R = 0.17$ m，圆柱壳中轴线到上下面板的厚度为 $h = 0.03$ m，弹性模量 $E = 193$ GPa，泊松比为 0.23，密度 $\rho = 8 \times 10^3$ kg·m^{-3}。将该模型的参数代入本文推导的平衡方程进行计算。并通过与弹性力学理论解和有限元解进行对比，得到如图2所示的径向应力沿壳体厚度方向的对比，可以发现3种计算结果非常接近。

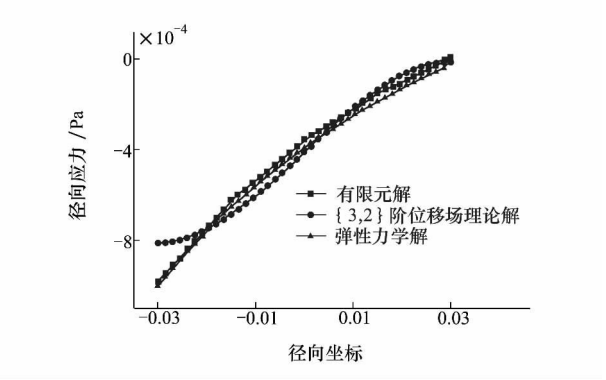
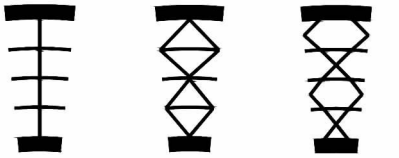


图2 各项均匀圆柱壳体的径向应力

3 正交各向异性的圆柱壳体分析

对于正方形，三角形和 Kagome 3种二维棱镜型(lattice)构型的多孔金属材料(见图3)，采用 Liu[8] 和 Zhou[9] 的均匀化理论将多孔金属材料等效为正交各向异性的材料，弹性矩阵见表1。利用{3,2}阶理论，计算其结构响应，并通过与有限元结果对比，以验证该理论的计算结果是否正确。设这3种构型的杆厚度为 0.002 m，其它参数与前面所述的均匀材料相同。



a) 正方形 b) 三角形 c) Kagome

图3 3种构型示意图

表1 3种结构的弹性矩阵

结构类型	弹性矩阵
正方形	$E\begin{bmatrix} 0.136 & 0.018 & 0.013 & 0 \\ 0.018 & 0.079 & 0 & 0 \\ 0.013 & 0 & 0.057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.006 \end{bmatrix}$
三角形	$E\begin{bmatrix} 0.234 & 0.035 & 0.019 & 0 \\ 0.035 & 0.113 & 0.038 & 0 \\ 0.019 & 0.038 & 0.045 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.008 \end{bmatrix}$
Kagome	$E\begin{bmatrix} 0.234 & 0.035 & 0.019 & 0 \\ 0.035 & 0.114 & 0.037 & 0 \\ 0.019 & 0.037 & 0.046 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.008 \end{bmatrix}$

计算 3 种构型的理论解以及有限元的数值解，分析得到两者的比值随着相对厚度的变化情况，如图 4 ~ 图 6 所示，分别为 3 种构型径向位移、径向应力和环向应力的比值变化情况。从图中可以发现，理论计算结果和有限元计算的结果非常接近，其中该理论在预测圆柱壳体径向位移时，高阶位移理论与有限元计算结果的比值基本在 1 ~ 1.05 之间，且比值变化幅度较小。在预测其它响应时，除了径向应力在最外层部分有稍大的误差以外，其它结果的误差均非常小。在预测径向位移时，正方形和三角形构型的计算误差较 Kagome 构型的小，而在预测

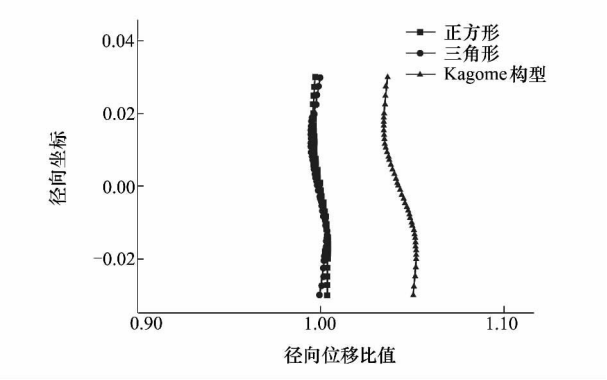


图 4　径向位移比值随着相对厚度的变化

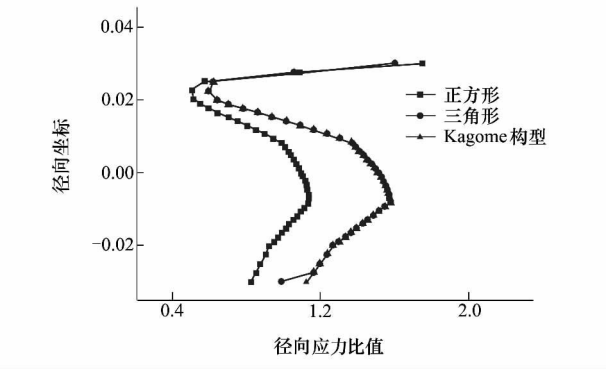


图 5　径向应力比值随着相对厚度的变化

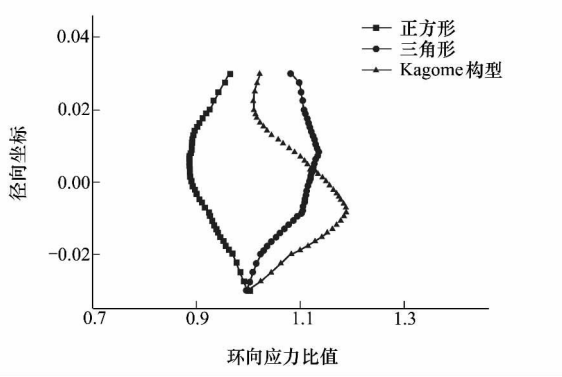


图 6　环向应力比值随着相对厚度的变化

诸如径向应力等响应时，正方形构型的误差较其它 2 种构型稍大，但从总体上来说，误差仍在可接受的范围内。在计算环向应力的时候，3 种计算结果的变化趋势不太一致，正方形构型的理论结果一直小于有限元计算结果，而其它 2 种构型的计算结果均大于有限元结果。

4　结　论

针对圆柱壳体结构，采用高阶位移场理论，推导并建立其平衡方程，计算在内压载荷作用下的结构响应，并通过与弹性力学理论解对比，验证该方法的正确性。最后，通过计算均匀化后的多孔金属圆柱壳体的结构响应，并与有限元结果进行对比，两者计算结果非常接近，误差较小，尤其是在预测径向位移时，该方法计算得到的结果与有限元的计算结果基本相同; 且在计算径向应力，环向应力等结构响应时误差也较小; 三角形和 Kagome 构型的计算结果较正方形的计算结果更为准确。综上，通过一系列的计算对比表明，该高阶位移场理论以其计算圆柱壳体结构响应的有效性和准确性，可以作为预测该类结构响应的计算方法。

参考文献:

[1] Mindlin R D. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Tropic, Elastic Plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, 18(1): 31-38

[2] Reddy J N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. Journal of Applied Mechanics, 1984, 51(4): 745-752

[3] Tessler A. A Two-Node Beam Element Including Transverse Shear and Transverse Normal Deformations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1991, 32(5): 1027-1039

[4] Cook G. A Higher-Order Bending Theory for Laminated Composite and Sandwich Beam. NASA Contractor Report 201674, 1997

[5] Cook G, Tessler A. A {3,2}-Order Bending Theory for Laminated Composite and Sandwich Beams. Composites Part B: Engineering, 1998, 29(5): 565-576

[6] Mantari J L, Oktem A S, Guedes S C. Static and Dynamic Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates and Shells by Using A New Higher-Order Shear Deformation Theory. Composite Structures, 2011, 94(1): 37—49

[7] Cetkovic M, Vuksanovic D. Bending, Free Vibrations and Buckling of Laminated Composite and Sandwich Plates Using A Layerwise Displacement Model. Composite Structures, 2009, 88(2): 219-227

[8] Liu T, Deng Z, and Lu T. Structural Modeling of Sandwich Structures with Lightweight Cellular Cores. Acta Mechanica Sinica, 2007, 23(5): 545-559

[9] Zhou J, Deng Z, Liu T, et al. Elastic Structural Response of Prismatic Metal Sandwich Tubes to Internal Moving Pressure Loading. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(11-12): 2354-2371

Research on Structural Response of Metallic Lattice Tube Based on Higher-Order Field Displacement (HOFD) Theory

Zhang Kai[1], Deng Zichen[1,2], Wang Bo[1]

(1. Department of Engineering Mechanics, Northwestern Polythechnical University, Xi´an 710072, China
2. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A metallic cylindrical lattice tube under internal pressure was analyzed by using the HODF theory. The response of the structure was obtained and compared with that obtained by using the FEM analysis. By using the homogenization method, three cylindrical lattice tubs, whose lattice types were Triangle, Square, and Kagome respectively, under internal pressure were homogenized to be orthotropic material and calculated by HODF theory. The HODF theoretical results and the FEM results were respectively obtained and their comparisons show that the differences are very small. The radial displacement and axial displacement obtained with HODF theory are nearly the same as the respective displacements obtained with FEM. The errors in radial stress, hoop stress and radial strain are relatively small. The ratios of the displacements obtained respectively with HODF theory and FEM are calculated and the patterns of these respective ratios are nearly the same. The results of Triangle and Kagome are better than the results of Square. The comparison and analysis of calculated results confirm preliminarily that the higher-order displacement theory can be used to calculate the correct responses of the metallic cylindrical lattice tube under internal pressure.

Key words: errors, finite element method, homogenization method, matrix algebra, schematic diagrams, strain, strain energy, variational techniques; cylindrical tube, higher-order displacement field(HODF) theory, lattice structure, orthotropic material