基于随机有限元法的平面多裂纹结构可靠性研究

薛小锋，冯蕴雯，冯元生

(西北工业大学 航空学院，陕西 西安 710072)

摘 要: 在考虑材料参数、裂纹长度、外载分散性的前提下，文章首先用一般六节点单元和六节点奇异等参单元建立了平面裂纹的有限元模型，用 Taylor 展开随机有限元方法分析了平面裂纹应力强度因子分散性。在考虑多裂纹结构的断裂韧性和应力强度因子服从对数正态分布的基础上，结合可靠性分析中的应力强度干涉模型和二阶窄边界理论，建立了多裂纹结构的裂纹失稳扩展可靠性模型。当结构处于平面应变状态时，极限应力强度因子可以直接采用材料断裂韧性，当结构的厚度不能满足平面应变状态要求时，必须将材料平面应变断裂韧性转换为能适用的极限应力强度因子; 对于各裂纹的应力强度因子及其分散性，可以通过随机有限元方法计算得到。

关 键 词: 多裂纹，可靠性模型，应力强度因子，随机有限元
中图分类号: O346.2 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2758(2012) 04-0508-05

目前，人们对老龄飞机多裂纹问题的研究主要是在疲劳多裂纹扩展和剩余强度研究上，但这些研究大多都是在将各影响因素考虑为确定性的情况下进行的[1-3]，而对多裂纹结构在各随机因素影响下的可靠性研究并不多[4]。在线弹性结构断裂力学中，含裂纹结构的可靠度可以简单认为是断裂韧性大于应力强度因子的概率[5]。因此，多裂纹结构可靠性模型所涉及的研究内容包括: 多裂纹应力强度因子及其分散性的计算，考虑应力强度因子及断裂韧性分布的可靠性计算方法，多裂纹结构的疲劳扩展特性及其分散性等内容。本文主要通过对多裂纹结构应力强度因子分散性计算理论、可靠性中的应力强度干涉模型、系统可靠性模型的研究，得到多裂纹结构可靠性的基本模型，为多裂纹结构研究提供支持。

1 平面多裂纹结构随机有限元模型的建立

随机性分析是断裂力学发展的一个方向，也是结构可靠性评估的基础。研究表明[6,7]，裂纹结构几何参数和物理参数的随机性对结构内裂纹断裂参数有着较明显的影响，研究多裂纹结构时其断裂参数也应视为随机变量，这样才能更加接近多裂纹问题的本质。

在断裂力学有限元分析中，目前比较通用的方法是在裂纹尖端布置 12 个奇异单元，如图 1a) 所示，只要裂纹尖端奇异单元的大小取得比较合适，一般为裂纹尺寸的 1/10 左右，裂纹尖端应力应变的模拟精度基本都能满足要求。

对于任意平面裂纹，如图 1b) 所示，首先将总体坐标系下裂纹尖端节点的位移转换到裂纹尖端坐标系下。

$$\begin{cases} u_i' = u_i\sin\beta + v_i\cos\beta \\ v_i' = -u_i\cos\beta + v_i\sin\beta \end{cases} \quad i = 1,2,3,4,5 \quad (1)$$

节点 1 为裂纹尖端，2、3、4、5 节点所公用的单元边为裂纹面。可以通过奇异单元裂纹面上的 4 个节点位移来计算应力强度因子，如下

$$K_I = M_1(v_5', v_4')^{\mathrm{T}} - M_2(v_3', v_2')^{\mathrm{T}} \quad (2)$$

式中

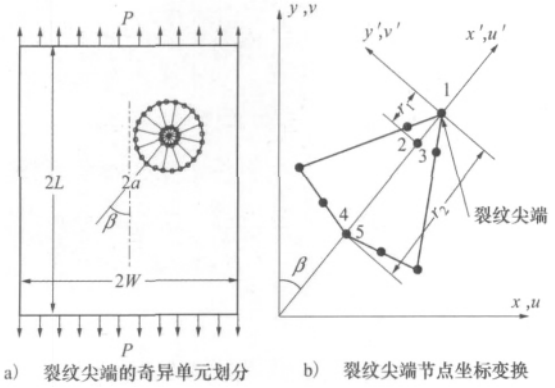
$$M_1 = \frac{r_1 E}{2(r_2 - r_1)(1+\nu)(k+1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r_2}}(1, -1)$$

收稿日期: 2011-09-20 **基金项目:** 国家自然科学基金(10577015) 资助。
作者简介: 薛小锋(1982—) ，西北工业大学讲师，主要从事飞行器结构可靠性分析与设计研究。

$$M_2 = \frac{r_2 E}{2(r_2 - r_1)(1+\nu)(k+1)}\sqrt{\frac{2\pi}{r_1}}(1,-1)$$

$$k = \begin{cases}(3-v)/(1+v) & \text{平面应力}\\ 3-4v & \text{平面应变}\end{cases}$$

u_i'、v_i'分别为节点 i 在裂纹尖端坐标系 x' 方向和 y' 方向上的位移，节点位移的均值和方差可以由随机有限元方法得到。



a)　裂纹尖端的奇异单元划分　　b)　裂纹尖端节点坐标变换

图 1　一般平面裂纹尖端的网格划分及尖端节点位移坐标变换

在各随机因素影响下，裂纹的应力强度因子必须考虑为随机变量。I 型应力强度因子的均值和方差可以表示为

$$E[K_I] = M_1(\overline{v_5'},\overline{v_4'})^{\mathrm{T}} - M_2(\overline{v_3'},\overline{v_2'})^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\mathrm{var}[K_I] = \sum_{i=4}^{5}\sum_{j=4}^{5} M_1 \cdot \mathrm{cov}(v_i', v_j') \cdot M_1^{\mathrm{T}} + \sum_{i=2}^{3}\sum_{j=2}^{3} M_2 \cdot \mathrm{cov}(v_i', v_j') \cdot M_2^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

采用同样的方法，II 型应力强度因子可以通过 x' 方向位移 v_i' 得到。在平面多裂纹情况下，对每个裂纹尖端做上述计算即可得到各裂纹尖端的应力强度因子均值和方差。则各应力强度因子的变异系数可以表示为

$$C_K = \frac{\sqrt{\mathrm{var}[K_I]}}{E[K_I]} \tag{5}$$

2　平面多裂纹结构可靠性研究

2.1　平面裂纹结构的应力强度因子干涉模型

对于多裂纹结构，结构的破坏是由裂纹失稳扩展引起的，裂纹失稳扩展是结构中裂纹的应力强度因子在载荷作用下超过结构材料的断裂韧性造成的。以 I 型裂纹为例其应力强度因子安全余量 M_K 可以表述为

$$M_K = K_C - K_I$$

式中，K_C 为材料的断裂韧性，实验统计资料表明一般服从对数正态分布[8]；K_I 为 I 型裂纹应力强度因子。则多裂纹结构的失效概率为

$$P_f = P(M_K < 0) = P(K_C - K_I < 0) \tag{6}$$

应力强度因子 K_I 的概率密度函数为 $f_{K_I}(K_I)$；断裂韧性 K_C 的概率密度函数为 $f_{K_C}(K_C)$。则可得到多裂纹结构的应力强度因子干涉模型，随着疲劳加载次数的增加，结构中的裂纹逐渐扩展，应力强度因子 K_I 单调增加；结构的断裂失效概率 P_f 则随着加载次数的增加而单调增加。

2.2　平面多裂纹结构的可靠性模型

对于如图 2 所示的包含 n 个裂纹的多裂纹结构，n 个裂纹就有多个应力强度因子，因此，结构的破坏是由 n 个裂纹中最大应力强度因子超过材料的断裂韧性引起相应的裂纹失稳扩展造成的。而在结构受载状态下，每个裂纹失稳扩展的失效概率可由应力强度因子干涉模型计算得到。

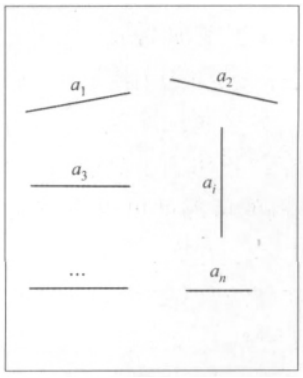


图 2　有 n 个裂纹的多裂纹结构

故此时多裂纹结构失效概率为

$$P_f = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} P_{ij} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{i-1}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i\\ k\neq j}}^{j-1} P_{ijk} - \cdots - (-1)^n P_{123\cdots n} \tag{7}$$

式中，P_i 为第 i 个裂纹失稳扩展的失效概率；P_{ij} 为第 i 和第 j 个裂纹失稳扩展的联合失效概率；P_{ijk} 为第 i、第 j 和第 k 个裂纹失稳扩展的联合失效概率。当取项数愈多时，用到的联合失效概率的阶数越高，计算愈精确，但计算量也愈大[9,10]。因此，可以考虑采用二阶窄边界法对其进行区间估计。二阶窄边界法考虑

了多裂纹中2个裂纹共同发生失稳扩展的概率 P_{ij}，计算量和计算结果精度基本可以接受。ρ_c 代表裂纹失稳扩展之间的相关系数，可由各裂纹失稳扩展的安全边界方程计算得到[11]。则任意2个裂纹发生失稳扩展的二阶联合失效概率 P_{ij} 可用下式估计

$$P_{ij} = \max\left[\Phi(-\beta_i)\,\Phi\left(-\frac{\beta_j-\rho_c\beta_i}{\sqrt{1-\rho_c^2}}\right),\ \Phi(-\beta_j)\,\Phi\left(-\frac{\beta_i-\rho_c\beta_j}{\sqrt{1-\rho_c^2}}\right)\right] \leqslant P_{ij} \leqslant \Phi(-\beta_i)\,\Phi\left(-\frac{\beta_j-\rho_c\beta_i}{\sqrt{1-\rho_c^2}}\right)+\Phi(-\beta_j)\,\Phi\left(-\frac{\beta_i-\rho_c\beta_j}{\sqrt{1-\rho_c^2}}\right)=\bar{P}_{ij} \tag{8}$$

可近似取，$P_{ij}=\dfrac{(P_{ij}+\bar{P}_{ij})}{2}$。$\beta_i$，$\beta_j$ 分别为第 i 个与第 j 个裂纹发生失稳扩展的可靠性指标，可以通过可靠性的干涉模型计算得到。多裂纹结构的应力强度因子及材料的断裂韧性一般服从对数正态分布，设随机变量 X 为材料的断裂韧性，Y 为多裂纹结构的应力强度因子，2个变量均服从对数正态分布，μ_{lx}、μ_{ly} 及 σ_{lx}^2、σ_{ly}^2 分别为 $\ln X$ 及 $\ln Y$ 的均值和方差。令 $z=\dfrac{x}{y}$，则 $\ln Z=\ln X-\ln Y$。随机变量 z 服从对数正态分布，其概率密度函数为

$$h(z)=\frac{1}{z\sigma_{lz}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln z-\mu_{lz})^2}{2\sigma_{lz}^2}\right] \tag{9}$$

式中 $\mu_{lz}=E(\ln z)$；$\sigma_{lz}^2=\mathrm{var}(\ln z)$。根据失效概率的定义，则有

$$P_f=P(z<1)=\frac{1}{\sigma_{lz}\sqrt{2\pi}}\int_0^1\frac{1}{z}\exp\cdot\left[-\frac{(\ln z-\mu_{lz})^2}{2\sigma_{lz}^2}\right]\mathrm{d}z \tag{10}$$

2.3 平面多裂纹结构的极限应力强度因子

极限应力强度因子是多裂纹结构可靠性计算模型中判断裂纹是否发生失稳扩展的判据。而极限应力强度因子是和材料的厚度有关的，对材料进行断裂性能研究发现，对于某一类材料，当厚度增加时，极限应力强度因子 K_C 会逐渐减小且逼近平面应变断裂韧性 K_{IC}。只要裂纹尖端处于平面应变状态，就可以将平面应变断裂韧性作为一个正确的失效判断标准。对应平面应变状态的最小材料厚度的经验计算公式如下[12]

$$t \geqslant 2.5\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s}\right)^2 \tag{11}$$

式中，σ_s 是材料的屈服强度。如果材料的厚度达不到以上标准，可采用如下半经验关系式通过平面应变断裂韧性来近似得到极限应力强度因子

$$K_C=K_{IC}\left[1+\frac{1.4}{t^2}\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s}\right)^4\right]^{1/2} \tag{12}$$

飞机机翼机身蒙皮厚度通常较小，受力状态往往处于平面应力状态，可以通过上式给出其极限应力强度因子；对于比较厚的金属壁板，可以直接采用平面应变断裂韧性。

3 用二阶窄边界法进行平面多裂纹结构可靠性分析计算

以图3中的平面对称共线双裂纹为例，通过本文方法来分析在 $[E,v,P,a_1,a_2]$ 各随机变量的影响下该多裂纹结构的失效概率。

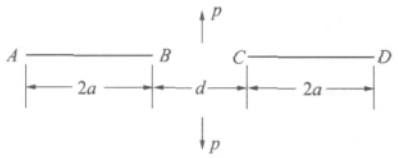


图3 共线裂纹

例1 图3为受单向均匀拉伸的中心Ⅰ型贯穿共线双裂纹大板，材料为2024－T851，屈服强度 σ_S = 262 MPa。板厚 t = 3 mm，分别考虑 d = 4 mm，6 mm，8 mm，10 mm 4种情况。裂纹长度 $a_1=a_2=a$ = 10 mm，变异系数 C_a = 0.01；材料弹性模量 E = 72 GPa，C_E = 0.05；外载 P = 100 MPa，变异系数 C_P = 0.05，各随机变量相互独立。求解过程如下：

1）建立安全边界方程

多裂纹结构的应力强度因子 K_I 和壁板材料的极限应力强度因子 K_C（对平面应变状态来讲即材料的断裂韧性）均可认为服从对数正态分布，因此，可以得到上述多裂纹结构裂纹失稳扩展的安全边界方程如下

$$\log(M_K)=\log(K_C)-\log(K_I)=0 \tag{13}$$

2）应力强度因子及其分散性的确定

该裂纹构型共有4个裂纹尖端 A、B、C、D，即有4个应力强度因子，有限元模型计算得到结果如表1所示，由对称性可知，裂纹尖端 C、D 的应力强度因

子分别与 B、A 相等。

表 1　共线多裂纹的应力强度因子

间距/mm	K_{IA}/(MPa·$mm^{1/2}$)	K_{IB}/(MPa·$mm^{1/2}$)	K_{IC}/(MPa·$mm^{1/2}$)	K_{ID}/(MPa·$mm^{1/2}$)
$d=10$	616.5	655.2	655.2	616.5
$d=8$	621.6	669.8	669.8	621.6
$d=6$	630.6	784.7	784.7	630.6
$d=4$	642.3	852.0	852.0	642.3

考虑载荷 P 的变异系数，裂纹长度 a 的变异系数，材料弹性模量 E 的变异系数，通过多裂纹结构的随机有限元模型计可以得到应力强度因子变异系数 $C_{K_I}=0.122\ 3$。

3) 多裂纹壁板极限应力强度因子及其分散性的确定

按照例题中材料的平面应变断裂韧性要求 $K_{IC}=695\ \text{MPa}\cdot\text{mm}^{1/2}$，通过(11)式计算按平面应变状态可得壁板厚度至少要 $t=2.5\left(\frac{K_{IC}}{\sigma_s}\right)^2=17.59\ \text{mm}$，本例中壁板厚度为3 mm达不到平面应变要求，处于平面应力状态。用(12)式将其转化为平面应力状态时的极限应力强度因子 $K_C=2\ 050\ \text{MPa}\cdot\text{mm}^{1/2}$，变异系数 $C_{K_C}=0.088$。

4) 综合失效概率计算

将以上数据代入裂纹失稳扩展的安全边界方程，通过二阶窄限界法计算的多裂纹结构失稳扩展失效概率如表 2 所示。

表 2　共线裂纹的计算结果

间距/mm	$d=10$	$d=8$	$d=6$	$d=4$
P_f	$5.045\ 5\times10^{-4}$	$6.308\ 2\times10^{-4}$	$2.818\ 5\times10^{-3}$	$5.684\ 9\times10^{-3}$

可以看出，当裂纹间距从 $d=10$ mm 变化到 $d=4$ mm 的过程中，裂纹失稳扩展失效概率逐渐增大，并且间距越小，失效概率越大。

4　结束语

1) 在考虑多裂纹结构断裂韧性和应力强度因子服从对数正态分布的基础上，运用二阶窄边界理论，建立了多裂纹结构的裂纹失稳扩展可靠性模型，多裂纹的应力强度因子及其分散性，可以通过随机有限元方法计算得到。

2) 由共线裂纹算例可以看出，裂纹间距对多裂纹结构失效概率有着明显影响，长度裂纹相同，间距越小，失效概率越大。在同一材料构成，承受同一载荷的多裂纹构型中，各裂纹扩展完全相关，裂纹失稳扩展综合失效概率主要是由应力强度因子最大的裂纹所决定。

3) 所建立的模型也可以应用到由不同材料构成的多裂纹结构形式，此时，各裂纹的失稳扩展失效概率由于材料的不同有所区别，对该模型来讲计算量会有所增大。

参考文献:

[1] Wang L, Brust F W, Atluri S N. The Elastic-Plastic Finite Element Alternating Method (EPFEAM) and the Prediction of Fracture under WFD Conditions in Aircraft Structures Part I: EPFEAM Theory. Computational Mechanics, 1997, 19: 356-369

[2] Ooi E T, Yang Z J. A Hybrid Finite Element-Scaled Boundary Finite Element Method for Crack Propagation Modeling. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2010, 199(17-20.3): 1178-1192

[3] Hsu Chinglong, Lo James, Yu Jin, Lee Xiaogong, et al. Residual Strength Analysis Using CTOA Criteria for Fuselage Structures Containing Multiple Site Damage. Engineering Fracture Mechanics, 2003, (4): 525-545

[4] Xue Xiaofeng, Feng Yunwen, Ying Zhongwei, Feng Yuansheng. Research of Plane Multiple Cracks Stress Intensity Factors Based on Stochastic Finite Element Method. Chinese Journal of Aeronautic. 2009, 22(03): 257-261

[5] 孟广伟，赵云亮，李　锋，沙丽荣. 含多裂纹结构的断裂可靠性分析. 吉林大学学报(工学版). 2008, 38(3): 614-618
Meng Guangwei, Zhao Yunliang, Li Feng, Sha Lirong. Reliability Analysis of Structures with Multi-Crack. Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition), 2008, 38(3): 614-618 (in Chinese)

[6] Zhao Jianping, Huang Wenlong, Dai Shuho. The Applications of 2D Elasto-Plastic Stochastic Finite Element Method in the Field of Fracture Mechanics. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 1998, 175(4): 281-286

[7] Galatolo R, Nilsson K F. An Experimental and Numerical Analysis of Residual Strength of Butt-Joints Panels with Multiple Site Damage. Engineering Fracture Mechanics. 2001, (68): 1437-1461

[8] 刘文斑. K_{IC}试验数据的统计处理. 固体力学学报. 1981, 2(1): 92-98
Liu Wenting. Statistical Treatment of K_{IC} Test Data. Journal of Solid Mechanics, 1981, 2(1): 92-98 (in Chinese)

[9] 董 聪. 现代结构系统可靠性理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2001, 121-126
Dong Cong. Modern Structural System Reliability Theory and Application. Beijing: Science Press, 2001, 121-126 (in Chinese)

[10] 郭树祥,许希武. 含共线分布多裂纹板的剩余强度. 南京航空航天大学学报, 2006, 38(12): 16-21
Guo Shuxiang, Xu Xiwu. Residual Strength of Plates with Multiple Collinear Cracks. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 38(12): 16-21 (in Chinese)

[11] 安伟光, 蔡荫林, 陈卫东. 随机结构系统可靠性分析与优化设计. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 2005, 219-222
An Weiguang, Cai Yinlin, Chen Weidong. Stochastic Structural System Reliability Analysis and Optimization Design. Harbin: Harbin Engineering University Press, 2005, 219-222 (in Chinese)

[12] Myer Kutz. Handbook of Materials Selection. John Wiley & Sons. New York. 2002, 720-722

Exploring Theoretically Reliability of Multiple-Crack Structure by Applying Taylor Stochastic Finite Element Method(TSFEM)

Xue Xiaofeng, Feng Yunwen, Feng Yuansheng
(College of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Sections 1 through 3 of the full paper explain our theoretical exploration mentioned in the title, whose core consists of: (1) TSFEM is applied to analyzing the uncertainty of plane multiple-crack stress intensity factor (SIF) through considering the uncertainties of material properties, crack lengths, and load; (2) stochastic finite element model of plane multiple-crack is presented; considering the lognormal distribution of fracture toughness and stress intensity factor, the transient propagation reliability model of multiple-crack structure is developed, including stress strength reliability interference model and secondary narrow boundary theory; (3) the ultimate stress intensity factor is the fracture toughness for the plane strain mode; when the panel thickness is not large enough for using the plane strain assumption, the plane strain fracture toughness should be transformed to available ultimate stress intensity factor; (4) the mean and uncertainty of stress intensity factor can be calculated by the TSFEM. Section 4 gives concluding remarks consisting of three parts.

Key words: computational complexity, computational geometry, crack propagation, elastoplasticity, finite element method, fracture toughness, mathematical models, probability, reliability, schematic diagrams, stress intensity factors, two dimensional; multiple-crack, Taylor stochastic finite element method(TSFEM)