一种变步长 AP-REE 算法的研究

智永锋，郑 曦，李 茹，邓正宏，张 骏

（西北工业大学 自动化学院，陕西 西安 710072）

摘 要： 为了提高自适应滤波器的滤波性能，提出了一种变步长的 AP-REE 算法。通过分析 AP-REE 算法权值误差和权值均方误差的二阶统计量，获得了参数迭代步长的一个优化解，促进了 AP-REE 算法在迭代方向上均方误差的收敛速度。仿真结果表明，相比较于定步长的 AP-REE 算法，变步长的 AP-REE 算法获得了更快的收敛速度。

关 键 词： 自适应滤波，算法，计算机仿真，数值法的收敛性，优化估计，变步长 AP-REE 算法
中图分类号： TN713 **文献标识码：** A **文章编号：** 1000-2758(2013)02-0183-06

归一化最小均方（Normalized Least Mean Square，NLMS）算法计算简单、容易实现，经常用在自适应滤波结构的设计中[1]。在一个固定不变的 N 维坐标系中，NLMS 算法是在输入信号的方向迭代，对于高度自相关的输入信号，自适应滤波器的前后迭代方向几乎平行。因此，NLMS 算法表现出了收敛速度慢的缺点。为了克服此缺点，文献[2]基于几何理论首先提出了仿射投影（Affine Projection，AP）算法，指出迭代方向应当与多个输入信号方向正交以促进收敛。文献[3]通过定义输入信号的方向向量概念，提出了一种新的 AP 算法迭代模型。文献[4]基于迭代方向自正交化将促进收敛的思想，提出了 NLMS-OCF（Normalized Least Mean Square with Orthogonal Correction Factors）算法，其与 AP 算法具有完全相同的外部特征。文献[5]假定输入信号方向前后相关独立，建立了 AP 算法收敛性的随机统计模型。文献[6]在文献[5]研究的基础上，通过分析滤波参数同系统测量噪声之间的相关性，分析了 AP 算法收敛性的权值均方误差（Mean Square Error，MSE）。当输入信号模型是自回归模型时，对 AP 算法迭代方向的分析等于是对自由度降低的高斯白噪声信号方向的分析，文献[7，8]分别建立了 AP 算法收敛性和跟踪性的随机统计模型。文献[9]基于能量守恒定律，通过分析权值误差和系统测量噪声之间的相关性，给出了 AP 算法收敛性的一种理论分析模型。文献[10]研究并给出了具有无偏性和一致性的 AP 算法稳定状态解。

AP 算法利用估计的输出误差表示迭代误差，而自适应滤波器迭代方向与引起估计输出误差的方向不同，导致修正的估计权值方向与引起估计输出误差的方向不一致。文献[11]通过对 AP 算法迭代方向的分析，建立了一种基于回归估计误差的仿射投影（Affine Projection Algorithm Using Regressive Estimated Error，AP-REE）算法，促进了自适应滤波收敛的性能，但增加了系统测量噪声。自适应滤波器的跟踪性能——均方偏差和失调量，非常依赖于参数迭代步长。自适应增益最小均方（Least Mean Square，LMS）算法通过实时估计迭代步长，促进了自适应滤波器的收敛性能[1]。在本文中，为了促进 AP-REE 算法在迭代方向 MSE 的下降速度，通过实时估计 AP-REE 算法的迭代步长，获得了一个优化的解，建立了一种变步长的 AP-REE（Variance Step Size Affine Projection Algorithm Using Regressive Estimated Error，VSS-AP-REE）算法，促进了自适应滤波器的收敛速度。

1 AP-REE 算法

在自适应滤波器的系统辨识模型中，假定系统

收稿日期：2012-05-12 基金项目：国家自然科学基金（61201321）与西北工业大学基础研究基金（JC20100217）资助
作者简介：智永锋（1979—），西北工业大学讲师，主要从事自适应滤波算法的研究。

的输入为广义平稳信号 x_n，相应的输出信号是 d_n，系统测量噪声是均值等于 0 的高斯白噪声 ε_n。利用抽头延迟线可以把输入信号转换为输入向量 $\mathbf{x}_n$，定义为

$$\mathbf{x}_n = [x_n \quad x_{n-1} \quad \cdots \quad x_{n-N+1}] \tag{1}$$

自适应滤波器的目标是在离散的时间点 n，通过利用最近的 $(m+1)$ 个输入向量，估计一个 N 维的权值向量 $\mathbf{w}_n$。定义过去输入的 m 个输入向量构成的输入矩阵 $\mathbf{X}_n$ 是

$$\mathbf{X}_n = [\mathbf{x}_{n-1} \quad \mathbf{x}_{n-2} \quad \cdots \quad \mathbf{x}_{n-m}] \tag{2}$$

文献[11]给出了 AP-REE 算法更新权值向量的结构，其迭代过程如下

$$\tilde{e}_n = d_n - \hat{d}_n \tag{3a}$$

$$e_n = \tilde{e}_n - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{n,i}\tilde{e}_{n-i} \tag{3b}$$

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n} e_n \tag{3c}$$

式中 $\tilde{e}_n$ 是估计输出误差，e_n 表示 AP-REE 算法的估计迭代误差，$\hat{d}_n$ 表示自适应滤波器的估计输出信号，参数 μ 表示算法的迭代步长。$\boldsymbol{\phi}_n$ 表示输入信号的方向向量，定义为

$$\boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{X}_{n-1,m}\hat{\mathbf{a}}_n = \mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{n,i}\mathbf{x}_{n-i} \tag{3d}$$

(3b)式和(3d)式中的向量 $\hat{\mathbf{a}}_n = [\hat{a}_{n,1} \quad \hat{a}_{n,2} \quad \cdots \quad \hat{a}_{n,m}]^T$ 可以由最小二乘算法计算而得

$$\hat{\mathbf{a}}_n = (\mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_n)^{-1}\mathbf{X}_n^T\mathbf{x}_n \tag{3e}$$

为了便于分析，假定存在一个真实的 N 维自适应滤波器的权值向量 $\mathbf{w}^0$。因此，基于文献[11]的结果可得相应的估计迭代误差信号

$$e_n = \tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n + \vartheta_n \tag{4}$$

式中

$$\vartheta_n = \varepsilon_n - \sum_{i=1}^{m} \hat{a}_{n,i}\varepsilon_{n-i} \tag{5}$$

和

$$\tilde{\mathbf{w}}_n = \mathbf{w}^0 - \mathbf{w}_n \tag{6}$$

从(3c)式和(4)式可以看出，AP-REE 算法的迭代方向与引起估计迭代误差的方向都是输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$，二者的方向相同。从文献[5]中可以看出 AP 算法的迭代方向是输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$，但是引起估计迭代误差的方向是输入向量。

利用(4)式，可得 AP-REE 算法迭代方向二阶统计量的 MSE 等于

$$\begin{aligned}\xi_n &= E[(\tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n + \vartheta_n)(\tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n + \vartheta_n)^T] \\ &= E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T\tilde{\mathbf{w}}_n] + E[\vartheta_n^2] + 2E[\boldsymbol{\phi}_n^T\tilde{\mathbf{w}}_n\vartheta_n]\end{aligned} \tag{7}$$

基于文献[7]中的假设，假定输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$ 是均值等于 0 的高斯向量，其自由度等于 $F=(N-m)$，它独立于估计权值向量 $\mathbf{w}_n$，其中假设合理性的证明在文献[7]中已经给出。由于 ϑ_n 是由系统测量噪声构成，而系统测量噪声独立于其它信号。因此，可得

$$E[\boldsymbol{\phi}_n^T\tilde{\mathbf{w}}_n\vartheta_n] = 0 \tag{8}$$

和

$$\begin{aligned}E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T\tilde{\mathbf{w}}_n] &= tr(E[\tilde{\mathbf{w}}_n\tilde{\mathbf{w}}_n^T\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T]) \\ &= tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)E[\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T]) = \sigma_\varphi^2 tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n))\end{aligned} \tag{9}$$

式中 σ_φ^2 表示输入信号方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$ 的方差。基于(8)式和(9)式，(7)式可以重新写为

$$\xi_n = \sigma_\varphi^2 \operatorname{tr}(\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)) + E[\vartheta_n^2] \tag{10}$$

从(10)式中可以看出，在输入信号和系统测量噪声一定的条件下，AP-REE 算法迭代方向二阶统计量的 MSE 主要依赖于权值误差协方差矩阵的迹。

2 AP-REE 算法的优化迭代步长

为了分析算法参数迭代步长的优化解，首先把(4)式的转置代入(3c)式，可得

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n + \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\vartheta_n \tag{11}$$

结合(6)式和(11)式，可得自适应滤波器权值误差的迭代方程

$$\tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{w}}_n - \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n - \mu \frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\vartheta_n \tag{12}$$

由(12)式，可得权值误差向量的协方差矩阵

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}) &= cov(\tilde{\mathbf{w}}_n) - \mu cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] - \\ &\mu E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]cov(\tilde{\mathbf{w}}_n) + \mu^2 E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n\tilde{\mathbf{w}}_n^T\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] - \\ &\mu E\left[\left(I - \mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\tilde{\mathbf{w}}_n\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] - \\ &\mu E\left[\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n^T\left(I - \mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\right] + \mu^2 E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

求方程(13)式两边的迹，可得

$$\operatorname{tr}(\operatorname{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_{n+1})) = tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)) -$$

$$\mu tr\left(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) -$$
$$\mu tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] cov(\tilde{\mathbf{w}}\boldsymbol{\phi}_n)\right) +$$
$$\mu^2 tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}\boldsymbol{\phi}_n\tilde{\mathbf{w}}\boldsymbol{\phi}_n^T\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) -$$
$$\mu tr\left(E\left[\left(\mathbf{I}-\mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\tilde{\mathbf{w}}_n\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) -$$
$$\mu tr\left(E\left[\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}\boldsymbol{\phi}_n^T\left(\mathbf{I}-\mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\right]\right) +$$
$$\mu^2 tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) \equiv tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)) - \Delta(\mu) \tag{14}$$

如果选择参数迭代步长 μ 使 $\Delta(\mu)$ 最大化，这样将确保从第 n 时刻点迭代到第 $(n+1)$ 时刻点的迭代均方误差下降到最大。因此，最大化方程式

$$\begin{aligned}\Delta(\mu) &= \mu\mathrm{tr}\left(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) +\\ &\mu tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\right) +\\ &\mu tr\left(E\left[\left(\mathbf{I}-\mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\tilde{\mathrm{w}}_n\frac{\boldsymbol{\phi}_n^T\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) +\\ &\mu tr\left(E\left[\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n^T\left(\mathbf{I}-\mu\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right)\right]\right) -\\ &\mu^2 tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n\tilde{\mathbf{w}}_n^T\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) -\\ &\mu^2 tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)\end{aligned} \tag{15}$$

由于系统测量噪声是均值等于 0 的高斯白噪声，(15) 式中的第 3、4 项等于 0。因此，可得优化的参数迭代步长

$$\mu_n = \frac{\mathrm{tr}\left(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) + tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\right)}{2tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n\tilde{\mathbf{w}}_n^T\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) + 2tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)} \tag{16}$$

由于变量 $\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T$ 中一个元素的变化仅仅影响变量 $\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n$ 中 N 个独立项元素一个或者两个的变化。当参数 N 值比较大时，变量 $\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T$ 中的元素变化时，变量 $\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n$ 的值变化不是很快，所以文献 [7] 指出变量 $\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T$ 与变量 $\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n$ 可以认为相互的独立。因此，可得 (16) 式中分子的第一项等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)\\ &\approx tr\left(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{1}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] E(\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T)\right)\\ &= \sigma_\varphi^2\, tr\left(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{1}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)\end{aligned} \tag{17}$$

由于假定输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$ 是均值等于 0 的高斯向量，它的自由度等于 $F = (N - m)$ [7]。因此，变量 $y = \boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n$ 服从卡方分布

$$f_y(y) = \frac{1}{2^{\frac{F}{2}}\sigma_\varphi^F\,\Gamma\left(\frac{F}{2}\right)} y^{\left(\frac{F}{2}\right)-1} e^{\frac{-y}{2\sigma_\varphi^2}} \quad y \geqslant 0 \tag{18}$$

利用 (18) 式，求变量 $\frac{1}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}$ 的数学期望值，可得

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] = \frac{1}{\sigma_\varphi^2(F-2)} \tag{19}$$

由 (17) 式和 (19) 式，可得

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n)\, E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) \approx \frac{1}{F-2} tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)) \tag{20}$$

同理，可得 (16) 式中分子的第 2 项等于

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right] cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)\right) \approx \frac{1}{F-2} tr(cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)) \tag{21}$$

基于文献 [7]，(16) 式中分母的第一项等于

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\tilde{\mathbf{w}}_n\tilde{\mathbf{w}}_n^T\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) = tr\left(\frac{1}{N(F^2+2F)}\right.\\ &\left.\{F tr[cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + mE[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]\, E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\}\mathbf{I}\right)\\ &= \frac{1}{F^2+2F}\{F tr[cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)] + mE[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]\, E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\}\end{aligned} \tag{22}$$

根据系统测量噪声是均值等于 0 的高斯白噪声，(16) 式中的分母第 2 项等于

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right) = tr\left(E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2}\right]\right)\mathrm{E}(\vartheta_n^2) \tag{23}$$

与 (17) 式相似，可以认为变量 $\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T$ 和变量 $(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2$ 相互的独立。因此，可得如下的表达式

$$\begin{aligned}&\mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)\\ &\approx tr(E[\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T])\, E\left[\frac{1}{(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2}\right]\mathrm{E}(\vartheta_n^2)\\ &= N\sigma_\varphi^2 E(\vartheta_n^2)\, E\left[\frac{1}{(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2}\right]\end{aligned} \tag{24}$$

利用(18)式,求变量 $\frac{1}{(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2}$ 的数学期望值,可得

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{(\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n)^2}\right]=\frac{1}{\sigma_\varphi^4(\mathrm{F}-2)(\mathrm{F}-4)} \tag{25}$$

由(24)式和(25)式,可得

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{E}\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\vartheta_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\frac{\vartheta_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]\right)\approx\frac{\mathrm{N}}{\sigma_\varphi^2(\mathrm{F}-2)(\mathrm{F}-4)}E(\vartheta_n^2) \tag{26}$$

把(20)式、(21)式、(22)式和(26)式代入(16)式,可得

$$\mu_n=\frac{\frac{1}{F-2}\mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n))}{\left\{\frac{1}{\mathrm{F}^2+2\mathrm{F}}\{\mathrm{F}tr[cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)]+\mathrm{mE}[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\}+\frac{\mathrm{N}}{\sigma_\varphi^2(\mathrm{F}-2)(\mathrm{F}-4)}\mathrm{E}(\vartheta_n^2)\right\}} \tag{27}$$

把(27)式中的分子和分母同时相乘 σ_φ^2,可得

$$\mu_n=\frac{\frac{1}{F-2}\mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\tilde{\mathbf{w}}_n))\sigma_\varphi^2}{\left\{\frac{1}{\mathrm{F}^2+2\mathrm{F}}\{\mathrm{F}tr[cov(\tilde{\mathbf{w}}_n)]\sigma_\varphi^2+\mathrm{m}E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\sigma_\varphi^2\}+\frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{F}-2)(\mathrm{F}-4)}E(\vartheta_n^2)\right\}} \tag{28}$$

由(10)式和(28)式,可得

$$\mu_n=\frac{\frac{1}{F-2}(\xi_n-\mathrm{E}[\vartheta_n^2])}{\left\{\frac{1}{F^2+2F}\{F(\xi_n-\mathrm{E}[\vartheta_n^2])+m\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\sigma_\varphi^2\}+\frac{\mathrm{N}}{(\mathrm{F}-2)(\mathrm{F}-4)}E(\vartheta_n^2)\right\}}$$

$$=\frac{(\mathrm{F}^2+2\mathrm{F})\xi_n-(\mathrm{F}^2+2\mathrm{F})E[\vartheta_n^2]}{\left\{\mathrm{F}(\mathrm{F}-2)\xi_n+(\mathrm{F}-2)\mathrm{m}E[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]E[\tilde{\mathbf{w}}_n]\sigma_\varphi^2+\left[\frac{(\mathrm{F}^2+2\mathrm{F})\mathrm{N}}{\mathrm{F}-4}-\mathrm{F}(\mathrm{F}-2)\right]E(\vartheta_n^2)\right\}} \tag{29}$$

$\mathrm{E}[\vartheta_n^2]$ 的结果可由(5)式计算而得,由于系统测量噪声是均值等于0的高斯白噪声。因此,可得

$$\mathrm{E}[\vartheta_n^2]=(1+\mathrm{E}[\hat{\mathbf{a}}_n^T\hat{\mathbf{a}}_n])\sigma_\varepsilon^2 \tag{30}$$

式中 σ_ε^2 是系统测量噪声的方差,设常数

$$C_1=(F^2+2F)\mathrm{E}[\vartheta_n^2]$$

$$C_2=\mathrm{E}[\vartheta_n^2]\left[\frac{(F^2+2F)N}{F-4}-F\times(F-2)\right]$$

可得优化的迭代步长等于

$$\mu_n=\frac{(F^2+2F)\xi_n-C_1}{[F(F-2)\xi_n+(F-2)mE[\tilde{v}_n^T]\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_n]\sigma_\varphi^2+C_2]} \tag{31}$$

(31)式构成了 AP-REE 算法迭代步长的优化解。

3 VSS-AP-REE 算法

由于自适应滤波器的权值向量独立于输入信号的方向向量,对(12)式两边求数学期望值,可得

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}]=E[\tilde{\mathbf{w}}_n]-\mu E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]E[\tilde{\mathbf{w}}_n]-\mu E\left[\frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\vartheta_n\right] \tag{32}$$

系统测量噪声是均值等于0的高斯白噪声,因此,可得(32)式中的最后1项等于0。同时,由于可以认为变量 $\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T$ 和变量 $\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n$ 相互独立,可得

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}]=\left(\mathbf{I}-\mu E\left[\frac{1}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}\right]E[\boldsymbol{\phi}_n\boldsymbol{\phi}_n^T]\right)E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \tag{33}$$

由于输入信号的方向向量是均值等于0的高斯向量,基于(19)式,可得

$$\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_{n+1}]=\left(1-\frac{\mu}{\mathrm{F}-2}\right)E[\tilde{\mathbf{w}}_n] \tag{34}$$

(31)式中的 $\mathrm{E}[\tilde{\mathbf{w}}_n^T]$ 和 $E[\tilde{\mathbf{w}}_n]$ 在实际系统中不易直接获得,基于(7)式和(34)式,(31)式可以重新写为

$$\mu_n=\frac{(F^2+2F)e_n^2-C_1}{\left[F(F-2)e_n^2+(F-2)m\left(1-\frac{\mu_{n-1}}{F-2}\right)^2e_{n-1}^2+C_2\right]} \tag{35}$$

利用变步长的参数 μ_n 代替定步长 μ,可得 VSS-AP-REE 算法

$$\mathbf{w}_{n+1}=\mathbf{w}_n+\mu_n\frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^T\boldsymbol{\phi}_n}e_n \tag{36}$$

(3a)式、(3b)式、(3d)式、(3e)式、(35)式和(36)式以一定的顺序构成了 VSS-AP-REE 算法。

4　算法仿真

在系统辨识模型中，假定 VSS-AP-REE 算法的初始估计权值向量是 $\mathbf{w}_0 = 0$，参数 $N = 32$。由于一个比较合理的选择是限定参数迭代步长的范围在区间(0，1]。因此，当 *VSS-APA-REE* 算法的参数迭代步长大于 1 时，设定为 1。系统测量噪声是均值等于 0，方差等于 10^{-6} 的高斯白噪声。假定真实系统的初始权值向量 $\mathbf{w}^0$ 具有最大熵，即

$$\mathbf{w}^0 = \mathbf{V1} \tag{37}$$

式中向量 $\mathbf{1} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$，输入信号的方向向量自相关矩阵为 $E[\boldsymbol{\phi}_n \boldsymbol{\phi}_n^T] = \mathbf{V\Lambda V}^T$。

示例 1　考虑表达式为 $x_n = -0.5x_{n-1} + z_n$ 的适度相关输入信号模型，其中 z_n 为均值等于 0 的高斯白噪信号。选择参数 $m = 1$，$c_1 = 0.001\ 3$ 和 $c_2 = 0.001\ 5$，AP-REE 算法的参数迭代步长选择等于 0.1。图 1 给出了 VSS-AP-AG 算法和传统 AP-REE 算法的 MSE 学习曲线的比较，从中可以发现 VSS-AP-REE 算法的收敛速度优于 AP-REE 算法。

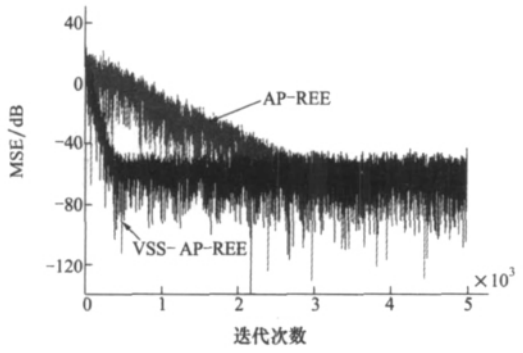


图 1　MSE vs 适度相关输入信号

示例 2　考虑表达式为 $x_n = -0.95x_{n-1} + z_n$ 的高度相关输入信号模型。选择参数 $m = 1$，$c_1 = 0.001\ 9$ 和 $c_2 = 0.002\ 2$，AP-REE 算法的参数迭代步长选择等于 0.2。图 2 表明相比较于 AP-REE 算法，VSS-AP-REE 算法具有比较快的收敛速度，VSS-AP-REE 算法通过自适应的调节参数迭代步长，促进了自适应滤波器的收敛速度。

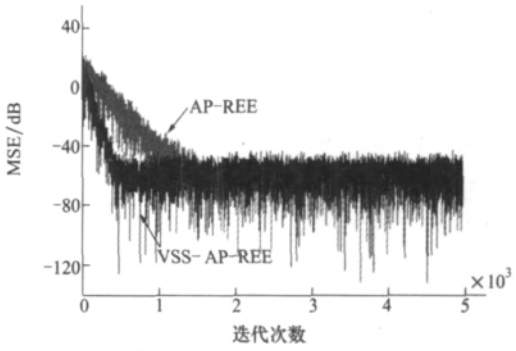


图 2　MSE vs 高度相关输入信号

5　结　论

通过选择参数迭代步长 μ 使 $\Delta(\mu)$ 最大化，确保了从第 n 时刻点迭代到第 $(n+1)$ 时刻点的迭代均方误差下降到最大，从而促进了自适应滤波器的收敛速度。本文通过分析 AP-REE 算法的收敛性能，获得了一种优化的迭代步长，通过把实时估计的迭代均方误差应用到建立的优化迭代步长中，建立了一种 VSS-AP-REE 算法。仿真结果表明: 相比较于传统 AP-REE 算法，本文提出的 VSS-AP-REE 算法促进了自适应滤波器的收敛性能。

参考文献:

[1] Haykin Simon. Adaptive Filter Theory, 4th ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2002

[2] Ozeki K, Umeda T. An Adaptive Filtering Algorithm Using an Orthogonal Projection to an Affine Subspace and Its Properties. Electronics and Communications in Japan, 1984, 67-A (5): 19-27

[3] Rupp M. A Family of Adaptive Filter Algorithms with Decorrelating Properties. IEEE Trans On Signal Processing, 1998, 46 (3): 771-775

[4] Sankaran S G, Beex A A. Fast Generalized Affine Projection Algorithm. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2000, 14(6): 623-641

[5] Sankaran S G, Beex A A. Convergence Behavior of Affine Projection Algorithms. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48 (4): 1086-1096

[6] Paul T K, Ogunfunmi T. On the Convergence Behavior of the Affine Projection Algorithm for Adaptive Filters. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2011, 58(8): 1813-1826

[7] Almeida S J M D, Bermudez J C M, Bershad N J, Costa M H. A Statistical Analysis of the Affine Projection Algorithm for Unity Step Size and Autoregressive Inputs. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2005, 52(7): 1394-1405

[8] Almeida S J M D, Bermudez J C M, Bershad N J. A Stochastic Model for a Pseudo Affine Projection Algorithm. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(1): 107-118

[9] Kim S E, Lee J W, Song W J. A Theory on the Convergence Behavior of the Affine Projection Algorithm. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(12): 6233-6239

[10] Zhi Y F, Zhang J, Li Y X. Steady-State Weights Solution of Affine Projection Algorithm. Journal of Control Theory and Applications, 2012, 10(2): 259-263

[11] Zhang S, Zhi Y F. Affine Projection Algorithm with Regressive Estimated Error. ISRN Signal Processing, 2011, //http: www.hindawi.com/sirn/sp/2011/180624/

[12] Papoulis A. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes. Ist ed. NY: McGraw-Hill, 1965

A Better Variable Step-Size (VSS) Affine Projection (AP) Algorithm Using Regressive Estimated Error (REE)

Zhi Yongfeng, Zheng Xi, Li Ru, Deng Zhenghong, Zhang Jun

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aim. To improve the convergence rate performance of an adaptive filter, especially for the highly colored input signals, Refs. 2 and 3 adopt the AP algorithm. Ref. 11 adopts AP-REE algorithm by redefining the iterated error for the AP algorithm. However, its gain does not change, and thus its convergence is not as rapid as is possible, in our opinion, with adaptive gain. We explain mathematically in sections 1, 2 and 3 of the full paper our VSS-AP-REE algorithm and explain how it achieves optimization. The simulation results, shown in Figs. 1 and 2, and their analysis indicate preliminarily that our VSS-AP-REE algorithm has faster convergence performance as compared with the conventional AP-REE algorithm.

Key words: adaptive filtering, algorithms, computer simulation, convergence of numerical methods, estimation, optimization; VSS-AP-REE (variable step-size affine projection using regressive estimated error) algorithm