

# 基于遗传算法的连续推力最短时间转移轨道设计

高 怀<sup>1 2 3</sup>, 朱战霞<sup>1 2</sup>, 刘 剑<sup>1 2</sup>

(1. 西北工业大学 航天学院, 陕西 西安 710072; 2. 航天飞行动力学技术国家级重点实验室, 陕西 西安 710072)  
(3. 中国人民解放军 96363 部队, 甘肃 天水 741020)

**摘要:**针对连续推力作用下的最优轨道转移问题, 在推力不变的条件下, 考虑时间最优, 设计了最优转移轨道和推力的作用方式。首先, 建立描述连续推力轨道转移的状态方程, 用变分法进行求解; 然后, 分别基于极小值原理和 bang-bang 控制原理推导出用协态变量表示的时间最优制导律, 其中基于极小值原理的最优控制避开了 bang-bang 控制可能出现的奇异区间。由于协态变量无法求解解析解, 文章采用遗传算法对协态变量进行优化求解。最后以同平面两个圆轨道为例进行了数值仿真, 结果表明两种方法得到的最短时间基本相同, 但采用极小值原理的最优转移轨道更加节省燃料。

**关键词:**连续推力 极小值原理 周向推力 非开普勒轨道 遗传算法 bang-bang 控制

中图分类号: V412.4 + 1 文献标识码: A 文章编号: 1000-2758(2012)02-0187-05

连续推力最优机动轨道以燃料最省(或能量最优)、时间最短或者时间-能量最优为目标, 其中对时间最短机动轨道的研究主要基于主矢量理论或最优控制理论, 并结合各种优化算法进行。Anastassios E. Petropoulos 等针对限制性三体问题中时间最短转移轨道问题, 基于主矢量理论, 得到最优控制律, 并以所需的推力方向作为反馈, 参数化初始协态量, 推出 bang-bang 控制开关的转换时间, 最后给出了最优转移轨道<sup>[1]</sup>。Ryan P. Russell 等也应用主矢量理论和 bang-bang 控制研究了限制性三体问题中轨道机动时间最优问题<sup>[2]</sup>。Seungwon Lee 等利用进化算法优化李亚普诺夫控制律中的参数, 研究了反平方引力场中任意轨道之间时间最短、燃料最省和时间-能量最优的小推力最优转移轨道问题<sup>[3]</sup>。Mischa Kim 基于现代最优控制理论, 用适应性模拟退火算法进行优化, 研究了连续小推力时间最短转移轨道问题<sup>[4]</sup>。目前在研究时间最短机动轨道时, 方法主要集中在控制原理和优化算法的选择上。本文将基于庞特里亚金极小值原理和遗传算法对连续推力时间最短燃料最省转移轨道进行研究。

首先, 建立连续推力轨道运动的状态方程, 并用变分法进行求解, 基于庞特里亚金极小值原理推导

出用协态变量表示的最优控制律, 同时基于 bang-bang 控制推导出发送机的开关转换时间。由于得到的最优制导律无法求得解析解, 因此需要数值求解。考虑到遗传算法的成熟性和稳定性, 因此用遗传算法对协态变量进行优化, 在此基础上, 得到最优控制律和推力作用方式的曲线, 并与 bang-bang 控制得到结果进行比较。

## 1 最优轨道转移问题的数学描述及求解

### 1.1 状态方程

在连续推力作用下的轨道运动方程为

$$\begin{cases} \dot{v}_r = -\frac{\mu - rv_\theta^2}{r^2} + \frac{T}{m} \sin\delta \\ \dot{v}_\theta = -\frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{T}{m} \cos\delta \\ \dot{r} = v_r \end{cases} \quad (1)$$

式中  $\mu$  为地球引力常数,  $r$  航天器距地心的距离,  $T$  为常值推力,  $m$  为航天的质量,  $v_r$  为航天器径向速度,  $v_\theta$  为航天器周向速度,  $\delta$  为推力角。令

$$x_1 = v_r, x_2 = v_\theta, x_3 = r, \mu_1 = \sin\delta, \mu_2 = \cos\delta$$

则轨道运动方程可写成如下状态方程的形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{\mu - x_3 x_2^2}{x_3^2} + \frac{T}{m} u_1 \\ \dot{x}_2 = -\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{T}{m} u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 \end{cases} \quad (2)$$

## 1.2 性能指标

对于轨道转移任务 若要燃料消耗最小 则其性能指标为

$$J_m = \int_{t_0}^{t_f} \dot{m} dt = m(t_f) - m(t_0) \quad (3)$$

从上式可以看出 对于常值推力系统 在大气层外  $T = \dot{m}u_e$   $\mu_e$  为常值 则燃料秒消耗  $\dot{m}$  也为常值 则燃料消耗为  $m = \dot{m}t$  完成整个轨道转移的时间越短燃料消耗越少 可见可以将燃料消耗最少的问题 转化为时间最短的问题 其性能指标为

$$J_t = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (4)$$

初始时刻  $t_0 = 0$  则  $\frac{T}{m} = \frac{T}{m_0 - \dot{m}t}$

## 1.3 哈密顿方程、协态方程和横截条件

对于最短时间轨道转移任务其边界条件为: 在初始时刻  $t_0 = 0$   $x(t_0) = [R_0, V_0]^T$   $m(t_0) = m_0$ ; 终端时刻  $t_f$   $x(t_f) = [R_{t_f}, V_{t_f}]^T$   $m(t_f)$  未知, 其中  $R_0, V_0$  为初始状态量  $m_0$  为初始时刻质量  $R_{t_f}, V_{t_f}$  为终端状态量  $m(t_f)$  为终端时刻质量。

约束条件为:  $|u_i(t)| \leq 1$  其中( $i = 1, 2$ )。

注: 下文中所有带 \* 量均为最优量

寻求最优控制  $u^*(t)$ , 使得系统以最短时间从初始状态  $x(t_0)$  转移到终端状态  $x(t_f)$ 。应用极小值原理 建立哈密顿方程

$$\begin{aligned} H = 1 + \lambda_1 & \left( -\frac{\mu - x_3 x_2^2}{x_3^2} + \frac{T}{m} u_1 \right) + \\ & \lambda_2 \left( -\frac{x_1 x_2}{x_3} + \frac{T}{m} u_2 \right) + \lambda_3 x_1 \end{aligned} \quad (5)$$

协态方程为:  $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} [x \ \mu \ \lambda]$  写成标量形式如下

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^* = -\lambda_3^* + \frac{x_2^* \lambda_2^*}{x_3^*} \\ \dot{\lambda}_2^* = \frac{-2x_2^* \lambda_1^* + x_1^* \lambda_2^*}{x_3^*} \\ \dot{\lambda}_3^* = \frac{x_2^{*2} \lambda_1^* - x_1^* x_2^* \lambda_2^*}{x_3^{*2}} - \frac{2\mu \lambda_1^*}{x_3^{*3}} \end{cases} \quad (6)$$

终端约束为

$$\xi[x^*(t_f^*) \ \lambda_f^*] = \nu_1(x_1^*(t_f^*) - V_{n_f}) + \nu_2(x_2^*(t_f^*) - V_{\theta_f}) + \nu_3(x_3^*(t_f^*) - R_{t_f}) = 0 \quad (7)$$

上式中  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  为拉格朗日算子  $V_{n_f}, V_{\theta_f}, R_{t_f}$  为终端状态量  $x_1^*(t_f^*), x_2^*(t_f^*), x_3^*(t_f^*)$  为理想的最优状态量。

则横截条件为

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1^*(t_f^*) & \left( -\frac{\mu - x_3^*(t_f^*) x_2^*(t_f^*)^2}{x_3^*(t_f^*)^2} + \frac{T}{m} u_1^*(t_f^*) \right) + \\ \lambda_2^*(t_f^*) & \left( -\frac{x_1^*(t_f^*) x_2^*(t_f^*)}{x_3^*(t_f^*)^2} + \frac{T}{m} u_2^*(t_f^*) \right) + \\ \lambda_3^*(t_f^*) x_1^*(t_f^*) & + \boldsymbol{\nu}^T \frac{\partial \xi[x^*(t_f^*) \ \lambda_f^*]}{\partial t_f} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

上式中  $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1 \ \nu_2 \ \nu_3)$  为拉格朗日算子  $x_1^*(t_f^*), x_2^*(t_f^*), x_3^*(t_f^*)$  为理想的最优状态量  $\lambda_1^*(t_f^*), \lambda_2^*(t_f^*), \lambda_3^*(t_f^*)$  为理想的最优协态变量  $u_1^*(t_f^*), u_2^*(t_f^*)$  为理想最优控制量。

在终端  $t_f^*$  时刻状态量变量  $x$  和协态变量  $\lambda$  均达到最优 因此有

$$\begin{aligned} x_1^*(t_f^*) &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin\theta \\ x_2^*(t_f^*) &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos\theta) \\ x_3^*(t_f^*) &= R \end{aligned}$$

$\mu$  为地球引力常数  $R$  为航天器的地心距  $e$  为目标轨道偏心率  $\theta$  为航天器在目标轨道上的真近点角,  $p$  为目标轨道半通径。

若目标轨道为圆轨道 则(8) 式可化简为

$$1 + \lambda_1^*(t_f^*) \frac{T}{m} u_1^*(t_f^*) + \lambda_2^*(t_f^*) \frac{T}{m} u_2^*(t_f^*) = 0 \quad (9)$$

## 1.4 最优制导律

要使  $H$  取最小值 寻求最优控制量  $u^*(t)$  满足极值条件:  $H[x^* \ \mu^* \ \lambda] = \min_{|u_i(t)| \leq 1} H[x^* \ \mu \ \lambda]$ 。

1) 由庞特里亚金极小值原理得最优控制量  $u^*(t)$  表达式为

$$\begin{cases} u_1^*(t) = -\frac{\lambda_1^*(t)}{\sqrt{\lambda_1^*(t)^2 + \lambda_2^*(t)^2}} \\ u_2^*(t) = -\frac{\lambda_2^*(t)}{\sqrt{\lambda_1^*(t)^2 + \lambda_2^*(t)^2}} \end{cases} \quad (10)$$

2) 按照 bang-bang 控制原理得

$$\begin{aligned} q_1^*(t) &= \frac{T\lambda_1^*(t)}{m_0 - \dot{m}(t - t_0)} \\ q_2^*(t) &= \frac{T\lambda_2^*(t)}{m_0 - \dot{m}(t - t_0)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$u_j^*(t) = \begin{cases} +1, & \text{当 } q_j^*(t) < 0 \\ -1, & \text{当 } q_j^*(t) > 0 \\ \text{不定}, & \text{当 } q_j^*(t) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

从  $q_j^*(t) = \sum_{i=1}^n b_{ij} [x^*(t) - t] \lambda_i(t)$  的表达式可以看出, 初始时刻为  $t_0 = 0$ ,  $(m_0 - \dot{m}t)$  是恒大于零的, 所以  $q_j^*(t)$  的正负, 只与  $\lambda_1^*(t), \lambda_2^*(t)$  的正负有关。

### 1.5 协态变量

目标轨道为圆轨道时, 在  $t = t_f^*$  将(7)式带入(9)式, 则横截条件的最终表达式为

$$1 - \frac{T}{m_0 - \dot{m}t_f^*} \sqrt{\lambda_1^*(t_f^*)^2 + \lambda_2^*(t_f^*)^2} = 0 \quad (13)$$

若  $\lambda^*(t) = k\lambda(t)$ , 则  $u^*(t)$  表达式的形式不变

$$\begin{cases} u_1^*(t) = -\frac{\lambda_1(t)}{\sqrt{\lambda_1(t)^2 + \lambda_2(t)^2}} \\ u_2^*(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{\sqrt{\lambda_1(t)^2 + \lambda_2(t)^2}} \end{cases} \quad (14)$$

将  $\lambda^*(t_f^*) = k\lambda(t_f^*)$ , 带入(13)式有

$$1 - \frac{T}{m_0 - \dot{m}t_f^*} k \sqrt{\lambda_1(t_f^*)^2 + \lambda_2(t_f^*)^2} = 0$$

则有

$$\frac{T}{m_0 - \dot{m}t_f^*} \sqrt{\lambda_1(t_f^*)^2 + \lambda_2(t_f^*)^2} = \frac{1}{k} \quad (15)$$

由(15)式就可以求出比例系数  $k$ 。

由于协态变量  $\lambda$  没有任何物理意义, 对最优控制量  $u^*$  无法得到解析表达式, 只能通过联立状态方程组和协态方程组, 在边界条件约束下, 求其数值解。给出任意时刻  $\lambda$ , 则可以得任意时刻的  $\lambda^*(t) = k\lambda(t)$ , 用遗传算法对  $\lambda$  进行优化求解, 可得最优控制量  $u^*$  的变化曲线。

## 2 遗传算法简介

遗传算法是由美国密歇根大学的 John H. Holland 教授及其学生提出的, 遗传算法所借鉴的生物学基础就是生物的进化和遗传。近年来, 由于遗传算法在解决复杂优化问题巨大潜力, 该算法得到了

广泛的关注, 成为目前应用最为广泛也最为成功的智能优化算法。

### 2.1 遗传算法基本思想

遗传算法是根据问题的目标函数构造一个适应性函数, 对一个由多个解构成的种群进行评估、遗传运算、选择, 经多代繁殖, 获得适应值最好的个体作为问题的最优解。

具体描述如下: 1) 产生一个初始种群; 2) 根据问题的目标函数构造适应性函数; 3) 根据适应值的好坏不断选择和繁殖; 4) 若干代后得到适应值最好的个体即为最优解。

### 2.2 构成要素

1. 种群和种群大小; 2. 编码方法, 也称为基因表达方法; 3. 遗传算子: 包括交叉和变异; 4. 选择策略; 5. 停止准则, 一般使用最大迭代次数作为停止准则。这里对构成要素做最简单介绍, 具体的选择在下文的仿真算例中给出具体说明。

### 2.3 算法流程

遗传算法的算法流程如图 1 所示。

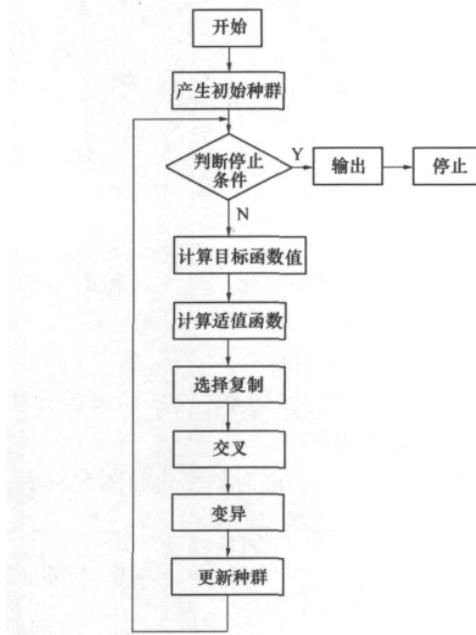


图 1 遗传算法流程图

## 3 数值仿真

以两个圆轨道之间的轨道转移为例, 其边界条件如下:

初始条件:  $t_0 = 0$  时刻  $v_r(t_0) = 0$ ,

$$v_\theta(t_0) = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}} r(t_0) = R_1,$$

$$\text{终点条件: } t_f \text{ 自由 } v_r(t_f) = 0, v_\theta(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}}, \\ r(t_f) = R_2.$$

用无量纲单位

$$\mu = 1 \text{ DU}^3 / \text{TU}^2, R_1 = 1 \text{ DU}, R_2 = 2 \text{ DU}$$

遗传算法相关因子的选择:

- 1) 种群的大小选择,一般来说将种群规模选得越大越好,但是种群越规模越大计算时间越长,一般为100~1000。本文种群数目为:200,个体长度为96。
- 2) 编码方式:采用二进制编码。
- 3) 遗传算子:交叉率为0.9,变异率为0.001。
- 4) 选择策略:经典的选择策略是轮盘赌方式,本文采用锦标赛选择。
- 5) 停止准则:一般使用最大迭代次数作为停止准则,本文选择遗传代数为30代,及最大迭代次数为30。
- 6) 协态变量的范围为:  $-1 \leq \lambda_1 \leq 1, -1 \leq \lambda_2 \leq 1, -1 \leq \lambda_3 \leq 1$
- 7) 适应性函数:在遗

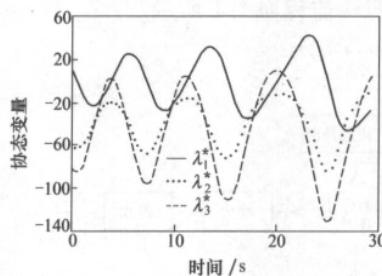


图2 协态变量随时间变化

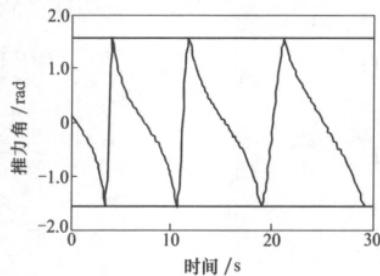


图3 推力角 \delta 随时间的变化

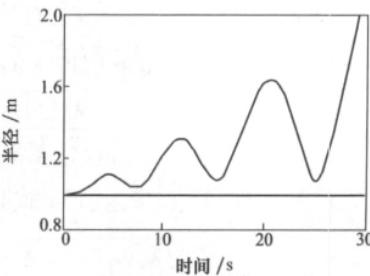


图4 半径随时间的变化

## 2) 采用 bang-bang 控制

联立方程(2)、(6)、(10)和(15),用遗传算法对其进行求解,结果如下:

协态变量  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$  随时的变化如图5所示。

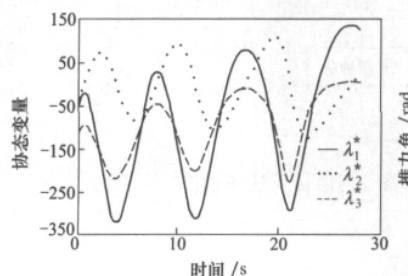


图5 协态变量随时间变化

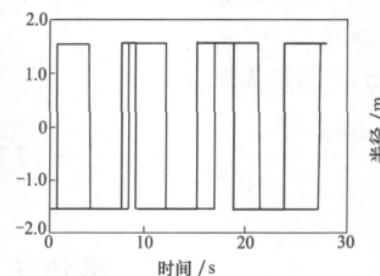


图6 推力角随时间的变化

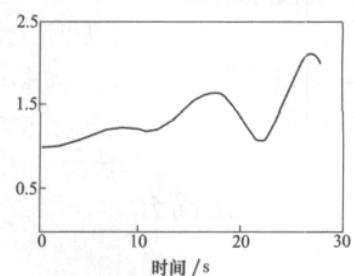


图7 半径随时间的变化规律

由极小值原理得到的最短时间和由 bang-bang

控制得到的最短时间基本相同,说明得到的最短时

## 1) 采用用极小值原理

联立方程(2)、(6)、(10)和(15),用遗传算法对其进行数值求解,结果如下:

协态变量  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*$  随时间的变化规律如图2所示:

推力角  $\delta$  随时间的变化如图3所示。

半径随时间的变化如图4所示。

采用 bang-bang 控制推力角的变化,如图6所示。

采用 bang-bang 控制半径随时间的变化如图7所示。

由极小值原理得到的最短时间和由 bang-bang

间是正确的。二者分别得到了在其控制律下的时间最短和燃料最省。但是,从图3和图4中可以看出,前者更省燃料。

## 4 结 论

将连续推力作用下的时间最短的最优轨道转移

### 参考文献:

- [1] Anastassios E Petropoulos , Ryan P Russell. Low-Thrust Transfers using Primer Vector Theory and a Second-Order Penalty Method. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit , Honolulu , Hawaii , 2008 , 1-9
- [2] Ryan P Russell. Primer Vector Theory Applied to Global Low-Thrust Trade Studies. Journal of Guidance , Control , and Dynamics , 2007 , 30( 2 ) : 460-472
- [3] Seungwon Lee , Paul von Allmen , et al. Design and Optimization of Low-Thrust Orbit Transfers. 2005 IEEE Aerospace Conference Proceedings , 2005 , 1-15
- [4] Mischa Kim. Continuous Low-Thrust Trajectory Optimization: Techniques and Applications. Ph. D. Thesis , Virginia Polytechnic Institute , 2005 , 45-77

## An Effective Minimum-Time Orbital Transfer Design under Continuous Thrust

Gao Huai , Zhu Zhanxia , Liu Jian

( College of Astronautics , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China)

**Abstract:** To achieve the optimal orbit transfer under continuous thrust , under the condition that the thrust size does not change , we design the optimal orbital transfer by taking minimum time and fuel consumption into account. Sections 1 and 2 of the full paper explain our minimum-time orbital transfer design , which is more effective than previous ones and whose core consists of: ( 1 ) we derive the state equations for describing the orbital transfer under continuous thrust; ( 2 ) we deduce two minimum-time guidance laws which are expressed as co-state variables , using the minimum-value principle and the bang-bang control principle respectively; the optimal control with the minimum-value principle can eliminate the singular interval which may occur with the bang-bang control principle; ( 3 ) as it is difficult to obtain the analytical solutions of the co-state variables , we use the genetic algorithm to optimize and solve them. Section 3 gives two numerical simulation examples of the transfer of circular orbits in the same plane by using the minimum-value principle and the bang-bang control principle respectively; the simulation results , presented in Figs. 2 through 7 , and their analysis show preliminarily that the orbital transfers with both principles take nearly the same minimum time; however , the orbital transfer with the minimum principle is more fuel-conserving.

**Key words:** control , design , efficiency , energy efficiency , genetic algorithms , numerical methods , optimization , orbital transfer , real variables , two dimensional; continuous thrust , minimum-value principle , bang-bang control principle , analysis , flowcharting , simulation

问题最终转化为两点边界值问题 ,用现代优化算法求解两点边界值问题。但是现代优化算法较为复杂 ,计算时间较长 ,实时性差 ,又存在较多的选择参数及如何选择这些参数的问题。如果能对状态方程进行线性化处理或者降低状态方程的非线性度 ,求解其近似的解析解 ,这样就能解决求解速度和实时性的问题。