常值径向推力加速度下航天器轨道运动特性研究

高 怀,朱战霞

(西北工业大学 航天学院,陕西 西安 710072)

摘 要: 文章研究了航天器在常值连续径向推力加速度作用下的运动特性。首先,基于非开普勒轨道理论,在惯性坐标系中建立了连续推力作用下航天器的动力学模型,经过推导和分析得了出在常值径向推力加速度下轨道动量矩仍保持常值,但其能量发生变化的结论。同时针对初始轨道是椭圆轨道的一般情况,分析了航天器在连续常值径向推力作用下环绕地球运动的条件,推导给出了求解逃逸点临界加速度的方程组。最后,对椭圆初始轨道和圆初始轨道的情况分别进行了分析和求解,并以仿真曲线的形式给出了不同常值加速度下轨道变化特性以及逃逸点临界加速度随轨道参数变化的特性,为机动轨道设计提供了理论参考。

关 键 词: 非开普勒轨道,连续推力,常值径向推力加速度,椭圆轨道
中图分类号: V412.4^{+} **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2758(2012)01-0038-06

航天器在连续推力作用下的轨道运动问题一直受到研究者的重视。早在 1953 年 Tsien [1] 就对恒定径向或周向推力作用下从圆形轨道出发的航天器的运动进行了分析。Battin, R. H. 在假设推力项与在轨航天器重量之比为常值的基础上,研究了连续径向和切向推力作用下航天器的运动[2,3]。John E. Prussing [4] 用拉格朗日函数分析了航天器的能量,提出了势能井的概念,并对径向常值加速度下从圆轨出发的航天器的运动特性进行了分析。文献[5]对径向加速度圆轨道进行了研究,在出发轨道为圆轨道的情况下得出了航天器绕中心引力体运动需要满足的条件和逃逸临界加速度。以上研究中,都是通过求解连续推力作用下运动方程的解析解,由解析解对运动的普遍性进行分析。但是在求解的过程中都是假设初始轨道是圆轨道,因此得出的结论不具有普遍性。对于初始轨道为一般椭圆轨道的情况 Giovanni Mengali [6] 从航天器能量的角度出发,分析了常值径向力作用下的逃逸条件,并得出了一些结论。

本文针对初始轨道为椭圆轨道的一般情况,借鉴研究开普勒轨道特性的思路,试图研究常值径向连续推力加速度作用下的非开普勒轨道特性。首先,建立了连续推力轨道运动的数学模型。其次,分析了常值径向加速度下航天器轨道运动的动量矩和能量特性。之后推导了椭圆初始轨道下达到逃逸速度理论上所需要的最小径向加速度。在此基础上,进行了理论计算和仿真,并得到了一些特殊的规律和结论。

1 非开普勒运动及方程

二体假设下航天器的基本运动方程如下式

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

式中 μ 为地球引力常数,$\boldsymbol{r}$ 为地心距,其大小为 r。由此方程解出的航天器运动轨迹为开普勒轨道。

从力学本质上来说,非开普勒轨道是指质点运动不满足(1)式的运行轨迹。在非开普勒轨道上运行的航天器的运动不符合或不完全符合开普勒三大定律。非开普勒运动可以有无穷多种,本文只考虑在控制力作用下航天器在中心引力场中的运动,并引入如下假设:

1) 视中心天体为理想中心引力体;

2) 航天器视为质点,且其质量远小于天体的质

收稿日期: 2011-04-18 **基金项目:** 国家自然科学基金(10802064)资助
作者简介: 高 怀(1985—),西北工业大学硕士研究生,主要从事航天飞行动力学与控制研究。

量,可忽略不计。

对照(1)式,容易得到航天器非开普勒运动的动力学方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_c + \boldsymbol{a} \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{a}_c$ 为摄动加速度矢量,$\boldsymbol{a}$ 为控制力加速度矢量,$\boldsymbol{r}$ 为地心距。

2　常值连续径向推力轨道的动量矩和能量特性

在研究开普勒轨道时,有三个保持不变的特征量,即动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$,能量 E 和 Laplace 常矢量。本文试图按此思路,来分析连续径向控制力对航天器运动所产生的影响。

在中心引力场中,不考虑摄动因素,由(2)式可得航天器在连续径向推力作用下的动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}_r \tag{3}$$

式中,$\boldsymbol{a}_r$ 为径向加速度矢量,其大小为 a_r。

2.1　动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$

对(3)式两边同时左叉乘以 $\boldsymbol{r}$,得

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}_r \tag{4}$$

显然,方程右边为零,则

$$\boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

考察动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 的导数,有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = 0$$

上式中 $\boldsymbol{v}$ 切向加速度,其大小为 v,则

$$\boldsymbol{H} = \text{常矢量} \tag{5}$$

(5)式表明,在中心引力场中,不考虑摄动因素,在连续径向推力作用下航天器的动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 保持不变。由于动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 指向轨道平面的法线方向,动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 保持不变也就意味着航天器轨道平面在惯性空间保持不变。从上文的推导过程中发现,径向加速度的大小对动量矩矢量 $\boldsymbol{H}$ 没有影响,即径向加速度的大小不会对动量矩矢量产生影响。

2.2　能量特性

对(3)式两边同时点乘以 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$,得到

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}_r \tag{6}$$

(6)式左端为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = v\sin\gamma$,其中 γ 为速度倾斜角,即轨道切线与当地水平线之间的夹角。

若径向加速度大小 a_r 保持不变,则(6)式右端为

$$-\frac{\mu}{r^3}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{r} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{a}_r = -\frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}_r$$

$$= -\frac{\mu}{r^3}vr\sin\gamma + v\sin\gamma a_r = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{r}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a_r r)$$

因此(6)式可写成如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} - a_r r\right) = 0$$

所以有

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = a_r r + \text{const} \tag{7}$$

仍定义轨道能量为

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$$

则在开普勒运动中,有

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \text{const}$$

但从(7)式可以看出在常值径向加速度的作用下,轨道能量不再为常值,而是等于某一常值加 $a_r r$,其大小不仅与径向加速度的大小有关还与航天器的位置有关。

3　逃逸点速度

由于 $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$,其带入(7)式得

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}(r\dot{\theta})^2 - \frac{\mu}{r} = \text{const} + a_r r \tag{8}$$

又因为 $\boldsymbol{H}$ 为常值,所以其大小 h 也为常值,所以 $r^2\dot{\theta} = h$ 为常值,可以将(8)式变成如下形式

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{\mu}{r} - a_r r = \text{const} \tag{9}$$

由(9)式可以看出,与速度有关的能量为第一项,这里令 $T_r = \frac{1}{2}\dot{r}^2$ [图],与位置有关的能量为后三项,这里令 $V_r = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 - \frac{\mu}{r} - a_r r$ [图],需要强调的

是,这三项中的第一项虽然形式上与位置有关,但其实质是 $r\dot{\theta}$ 项。

若令 $\bar{E}=\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2-\frac{\mu}{r}-a_r r=\text{const}$,则有 $\bar{E}=\text{const}$,(9) 式对 r 求导,有 $\frac{\mathrm{d}\bar{E}}{\mathrm{d}r}=0$,即

$$-\frac{h^2}{r^3}+\frac{\mu}{r^2}-a_r=0 \tag{10}$$

下面以(10)式为基础,分析不同初始出发轨道下的逃逸条件。

3.1 初始轨道为椭圆轨道的情况

对于初始轨道是椭圆轨道的情况,因为

$$h=\sqrt{\mu p}=\sqrt{\frac{2\mu r_a r_p}{r_a+r_p}}$$

令 $k=r_a/r_p$,其中 r_p 为近地点高度,r_a 为远地点高度。则用近地点高度表示的动量矩为

$$h=\sqrt{\frac{2\mu k}{k+1}r_p}$$

假设航天器从某一时刻开始受到连续推力的作用,由于航天器的动量矩保持不变,因此可以用近地点处的动量矩表示轨道上任意一点的动量矩。将 $h^2=\frac{2\mu k}{k+1}r_p$ 代入(10)式有

$$-\frac{2k}{k+1}\left(\frac{r_p}{r}\right)^3+\left(\frac{r_p}{r}\right)^2-\frac{a_r}{\mu/r_p^2} \tag{11}$$

$\bar{E}$ 为常值,航天器在初始点的 $\bar{E}$ 为

$$\bar{E}=\bar{E}_0=\text{const}=\frac{k+1}{2k}\frac{\mu}{r_p}\cdot\left(\frac{1+2e_0\cos\theta_0+e_0^2}{2}-(1+e_0\cos\theta_0)\right)-a_r r_p\frac{2k}{k+1}\frac{1}{1+e_0\cos\theta_0}$$

上式中 e_0 为初始轨道的偏心率,θ_0 为径向推力开始作用时的真近点角。因为 E 为常值,则(9)式可写成如下形式

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{k}{k+1}\frac{\mu r_p}{r^2}-\frac{\mu}{r}-a_r r=\bar{E}_0$$

如果逃逸发生,则 $V_r<\bar{E}$,则径向加速度 a_r 的临界值在 $V_r=\bar{E}$ 时可以确定[3],于是有

$$\frac{k}{k+1}\frac{\mu r_p}{r^2}-\frac{\mu}{r}-a_r=\bar{E}_0 \tag{12}$$

令 $R=\frac{r_p}{r}$、$\zeta=a_r/\left(\frac{\mu}{r_p^2}\right)$ 则(11)式和(12)式可化简为(13)式和(14)式

$$-2\frac{k}{k+1}R^3+R^2-\zeta=0 \tag{13}$$

$$\frac{k}{k+1}R^2-R-\frac{\zeta}{R}=\frac{k+1}{2k}\cdot\left(\frac{1+2e_0\cos\theta_0+e_0^2}{2}-(1+e_0\cos\theta_0)\right)-\zeta\frac{2k}{k+1}\frac{1}{1+e_0\cos\theta_0} \tag{14}$$

从以上两组表达式可以看出,在初始轨道是椭圆轨道的情况下,逃逸的临界加速度不仅与长半轴和短半轴的比例有关,而且还和航天器在椭圆轨道所处的位置有关。

3.2 初始轨道为圆轨道的情况

如果初始轨道是圆轨道,有 $k=1$,$e_0=0$,$h=\sqrt{\mu r}$ 则可以得到如下表达式

$$\zeta-R^2+R^3=0 \tag{15}$$

$$2\zeta-(1+2\zeta)R+2R^2-R^3=0 \tag{16}$$

此时 $r_0/r=R$,$\zeta=a_r/\left(\frac{\mu}{r_0^2}\right)$。联合(15)式和(16)式可以解出 $R=1/2$,$\zeta=0.125$,即 $a_{rlj}=\frac{1}{8}\frac{\mu}{r_0^2}$,此时 $\frac{r_0}{r}=2$。

在此定义 $a_{rlj}=\frac{1}{8}\frac{\mu}{r_0^2}$ 为临界加速度。如果常值径向加速度的值大于 a_{rlj},航天器的速度就会达到逃逸速度,那么航天器一定会脱离地球中心引力场,只要径向加速度的值不大于 a_{rlj},那么航天器仍然能够环绕地球运动。

由上文的推导过程可知在常值径向加速度作用下能量不再是个常量。由于在逃逸点,航天器动能和势能之和为零[4],则有下面的式子成立

$$\frac{1}{2}v^2-\frac{\mu}{r}=0$$

当初始轨道是半径为 r_0 圆轨道时,(7)式变为

$$-a_r r=-\frac{\mu}{2r_0}-a_r r_0$$

则当 $a_r>a_{rlj}$ 时,可得逃逸时航天器轨道的极半径 $r<5r_0$,这与参考文献[4]得出的结论一致。

4 数值仿真与结果分析

1) 初始轨道高度为 8 000 km 的圆轨道,此时航天器的临界加速度为 $a_{rlj}=0.778\,5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$。不同的 a_r 下,轨道特性不同。仿真结果如图 1 所示: 虚线为

航天器在没有径向加速度时的运动轨迹。粗实线为 $a_r = 0.78\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 时航天器的运动轨迹,这时径向加速度超过临界加速度,在某一时刻航天器不再绕地球运动,脱离地球这个中心引力场。细实线为 $a_r = 0.778\ 5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 航天器的运动轨迹,这时的径向加速度为临界加速度,航天器仍然在绕地球运动,航天器从初始轨道的 P 点出发,经过一段时间的运动回到初始轨道,所经历的运动轨迹是一条对称的曲线。

2) 航天器的初始状态为: $a = 26\ 565\ \mathrm{km}$, $e = 0.735\ 5$, $i = 0°$, $\Omega = 0°$, $\omega = 0°$, $\theta = 0°$。计算得 $a_{rlj} = 0.040\ 68\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。仿真结果如图 2 所示: 细实线为航天器没有径向推力作用时的运动轨迹。虚线为 $a_r = 0.040\ 68\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 时航天器的理论运动轨迹,此时轨道的近地点和远地点的位置在绕地球某一封闭曲线上变化。粗实线是 $a_r = 0.041\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 时航天器的运动轨迹,由于这时的常值径向加速度超过临界加速度,所以在某一时刻航天器的速度达到临界速度,逃脱地球引力场的作用。

3) 航天器的初始状态为: $a = 26\ 565\ \mathrm{km}$, $e = 0.735\ 5$, $i = 0°$, $\Omega = 0°$, $\omega = 0°$, $\theta = 144°$。计算可得 $a_{rlj} = 0.058\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$。仿真曲线如图 3 所示: 细实线为航天器没有径向推力作用时的运动轨迹,虚线为 $a_r = 0.058\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 时航天器的理论运动轨迹,粗实线为航天器在 $a_r = 0.059\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 时的运动轨迹,可见从椭圆轨道任意位置出发,在等于临界加速度的常值径向加速度作用下,与仿真算例 2 的结论相似。

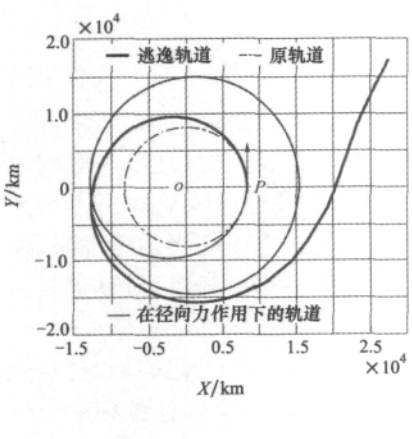


图 1　常值径向加速度轨道

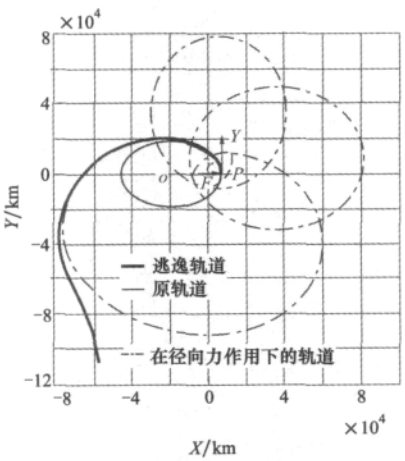


图 2　常值径向加速度轨道

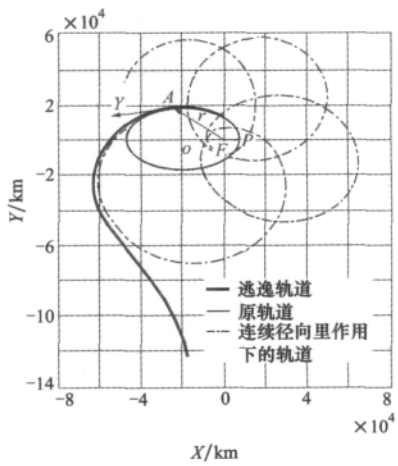


图 3　常值径向加速度轨道

4) 只改变径向推力开始作用时的位置,即只改变真近点角,其它条件与仿真算例 2 中的相同,这时航天器发生逃逸的临界加速度也发生变化,仿真结果如图 4 所示: 从近地点开始随着真近点角的增大,航天器的临界加速度增大,到远地点达到最大,然后再减小回到初始值。从图中可以看出,在近地点临界加速度最小,远地点临界加速度最大。

5) 只改变轨道长半轴和短半轴的比,即 $k = r_a/r_p$,即改变轨道的偏心率,其它条件与仿真算例 2 中的相同。仿真结果如图 5 所示: 随着 k 值的增大,临界加速度越来越小。在圆轨道时,航天器要达到逃逸速度需要最大的临界加速度。

6) 轨道倾角 $i = 0°$,升交点赤经 $\Omega = 0°$,近地点幅角 $\omega = 0°$,真近点角 $\theta = 0°$。以上四个要素保持不变,改变半长轴 a 和 $k = r_a/r_p$。仿真结果如图 6 所示: 由图可见对于相同的半长轴,随着 k 值的增大,临界加速度在减小,而对于相同的值,半长轴越小需要的临界加速度越大。

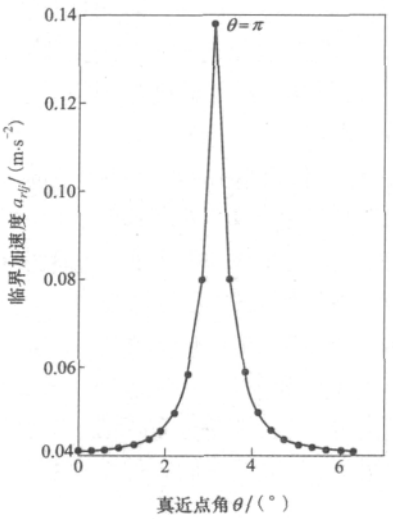


图4 临界加速度变化曲线

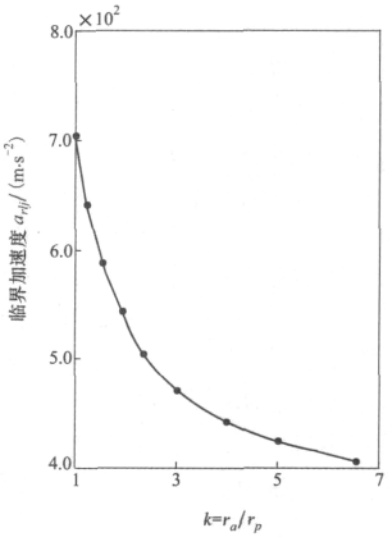


图5 临界加速度变化曲线

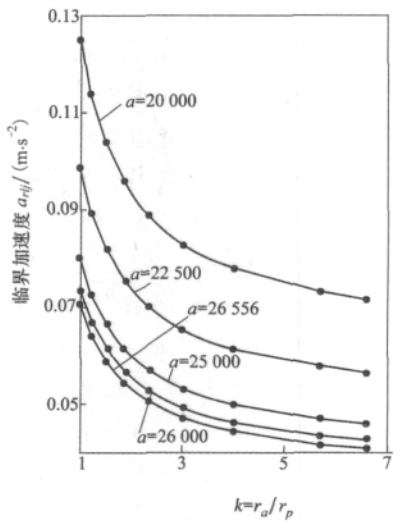


图6 临界加速度变化曲线

5 结 论

在连续径向推力作用下航天器轨道的动量矩 H 保持不变，与径向加速度的大小没有关系。在常值径向加速度作用下航天器轨道的能量与开普勒轨道的能量相比发生了变化，不再保持为常值，其大小不仅与径向加速度的大小有关还与航天器的初始位置有关。对于初始椭圆轨道出发的情况，逃逸临界加速度受到椭圆偏心率、半长轴的影响而不同。当常值径向加速度超过临界加速度时，在某一时刻航天器的速度达到临界速度最终逃脱地球引力场的作用。当径向加速度的大小等于临界加速度时，航天器的运动仍然受中心引力场的约束，最终都会回到近地点附近。

本文的结论可以为航天器机动轨道设计提供理论参考，作者将进一步考虑与实际任务相结合的轨道设计和优化研究。

参考文献:

[1] Tsien H S. Take-Off from Satellite Orbit. Journal of the American Rocket Society, 1953, (7~8): 233~236

[2] Frederick W Boltz. Orbital Motion under Continuous Radial Thrust. J Guidance Engineering Notes, 1991, 667~670

[3] Frederick W Boltz. Orbital Motion under Continuous Tangential Thrust. J Guidance Engineering Notes, 1991, 1503~1507

[4] John E Prussing. Constant Radial Thrust Acceleration Redux. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(3)

[5] 周姜滨. 空间飞行器连续推力机动轨道研究 [博士学位论文]. 西安: 西北工业大学,2008
Zhou Jiangbin. Maneuvering Orbits of Spacecrafts under Continuous Thrust. Ph. D. Thesis. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2008 (in Chinese)

[6] Giovanni Mengali. Escape from Elliptic Orbit Using Constant Radial Thrust. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(3): 1018~1022

Exploring Orbit Motion Characteristics of Spacecraft under Constant Radial Thrust Acceleration

Gao Huai, Zhu Zhanxia

(College of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aim. The introduction of the full paper discusses relevant matters and then proposes the exploration mentioned in the title, which is explained in sections 1 through 3. Their core consists of: "Firstly, based on non-Keplerian orbit theory, we establish the dynamics model of the spacecraft under constant radial thrust in inertial frame. Under the constant radial acceleration, the moment of momentum of the orbit is constant, while the energy of the spacecraft is changed. Then, the conditions for spacecraft orbiting earth under constant radial thrust are analyzed in the general form of elliptical initial orbits, and the equations for solving critical acceleration are derived." Finally, section 4 studies respectively the two cases of elliptical and circular initial orbits. Simulation curves are presented in Figs. 1, 2 and 3 and we analyze these curves with the help of Figs. 4, 5 and 6. These simulation curves and their analysis are, in our opinion, useful for the design of maneuver orbits.

Key words: analysis, design, dynamics, equations of motion, iterative methods, models, motion estimation, numerical methods, orbits, simulation, spacecraft; constant radial thrust acceleration, continuous thrust, non-Keplerian orbit

魏炳波教授当选中国科学院院士

题目是上述标题的报道是西北工业大学宣传部所写,见《西北工大报》2011 年 12 月 15 日头版。上报道共有 6 段文字,本简讯摘录第 1、第 2、第 4 段的部分内容如下:

本报讯　2011 在中国科学院院士增选结果日前公布,西北工业大学魏炳波教授入列新当选院士榜单,成为中国科学院技术科学部院士。

魏炳波主要从事金属材料凝固科学与技术研究。他 1964 年 4 月出生于山东省惠民县。1989 年在西北工业大学材料系获铸造专业博士学位,1991 ~ 1992 年在德国宇航院和 Max-Planck 金属研究所作洪堡学者。1992 年回国破格普升西北工业大学教授。1994 年获首届国家杰出青年科学基金,1998 年获中国青年科学家奖,1999 年获全国五一劳动奖章。先后被评为全国先进工作者、国家级有突出贡献中青年专家和首批长江学者特聘教授。并任中国材料研究学会副理事长和教育部科技委材料学部副主任。

他建立了金属材料超常凝固实验系统,自主研制了电磁悬浮、超声悬浮、静电悬浮、熔体浸浮和自由落体等五种实验设备,建立了一套功能互补的金属材料超常凝固实验系统,……Nature 杂志和 Science 网络版分别于 2001、2002 和 2006 年三次给予专题评论。

摘录人: 胡沛泉

2012 年 1 月