伪仿射投影算法优化迭代步长的研究

郑曦，智永锋，张骏

（西北工业大学 自动化学院，陕西 西安 710072）

摘 要: 为了促进自适应滤波器的滤波性能，建立了一种变步长的伪仿射投影（Pseudo Affine Projection，PAP）算法。通过使得权值误差在输入信号方向向量的误差等于0，结合正交迭代算法，获得了 PAP 算法的优化迭代步长。仿真结果表明：基于优化迭代步长的 PAP 算法促进了自适应滤波器的收敛性和失调量。

关 键 词: 自适应滤波；算法；计算机仿真；数值法的收敛性；辨识；仿射投影；优化迭代步长
中图分类号: TP391.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-2758（2014）01-0102-04

自适应滤波技术在噪声和回波消除、均衡、波束形成中得到了广泛应用。归一化最小均方（normalized least mean square，NLMS）算法计算简单，因此获得了广泛应用[1]。但是对于高度自相关的输入信号，信号特征值相差比较大，NLMS 算法表现出了收敛速度慢的特性。为了改善这一问题，提出了一些高效、快速收敛的自适应滤波算法。比如，从几何理论研究的角度，文献[2]首次提出了仿射投影（affine projection，AP）算法。通过引入输入信号方向向量的概念，建立了基于自回归模型的 AP 算法和滑动平均模型的正交迭代（orthogonal direction，OD）算法[3]。基于连续的输入信号相互正交将促进自适应滤波器收敛的思想，建立了一种基于正交因子的 NLMS 算法[4]。文献[5]建立了一种简化的 AP 算法，称为伪仿射投影（pseudo affine projection algorithm，PAP）算法。接着文献[6]分析了 PAP 算法的统计特性，研究了 PAP 算法的权值均方误差收敛性。

基于变步长可以促进自适应滤波的性能，文献[7]建立了一种带有指数平滑因子的 AP 算法。通过分析估计输出的误差信号，文献[8]获得了迭代步长的一个实时估计值，建立了一种自适应增益 AP 算法，接着分析了 AP 算法权值稳定状态的解[9]。文献[10]分析了基于回归估计误差的 AP 算法统计特性，接着分析了其优化迭代步长[11]。

在本论文中，通过分析 PAP 算法的迭代步长，利用 OD 算法定义的输入信号方向向量，使得在其方向的权值误差等于0，获得了 PAP 算法的优化迭代步长，促进了自适应滤波器的收敛性和失调量。

1 PAP 算法

在自适应滤波器的系统辨识模型中，系统的输入是均值等于0的稳定信号 x_n。利用抽头延迟线可以把输入信号转换为输入向量 $\boldsymbol{x}_n$，定义为

$$\boldsymbol{x}_n = [x_n \quad x_n - 1 \quad \cdots \quad x_{n-N+1}]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

由 m 个输入向量构成的输入矩阵 $\boldsymbol{X}_{n-1}$，定义为

$$\boldsymbol{X}_{n-1} = [\boldsymbol{x}_{n-1} \quad \boldsymbol{x}_{n-2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{x}_{n-m}] \tag{2}$$

系统辨识的目标是在离散的时间点 n，利用最近的（$m+1$）个输入向量，估计一个 N 维的权值向量 $\boldsymbol{w}_n$。文献[3]给出了用自适应滤波器实现 PAP 算法更新权值向量的结构，其迭代过程如下所示：

$$\hat{d}_n = \boldsymbol{w}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n \tag{3}$$

$$e_n = d_n - \hat{d}_n \tag{4}$$

$$\boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{w}_n + \mu \frac{\boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_n} e_n \tag{5}$$

式中：e_n 表示估计的误差信号，μ 表示自适应滤波器的迭代步长，相应的系统输出信号为 d_n，自适应滤波器估计的输出信号为 $\hat{d}_n$。$\boldsymbol{\varphi}_n$ 表示输入信号的方

收稿日期：2013-09-28 基金项目：国家自然科学基金（61201321）资助
作者简介：郑曦（1979—），西北工业大学博士研究生，主要从事自适应信号处理研究。

向向量,定义为

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{X}_{n-1}\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n \tag{6}$$

向量 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n$ 由下面的方程式计算而得

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_n = [\boldsymbol{X}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_{n-1}]^{-1}\boldsymbol{X}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n \tag{7}$$

从(3)式到(7)式构成了 PAP 算法,下面将分析 PAP 算法的优化迭代步长,以促进其收敛性和失调量的性能。

2　优化迭代步长

假设存在着一个真实的 N 维权值向量 $\boldsymbol{w}^0$。因此,相应的误差信号可以写为

$$e_n = \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n + \varepsilon_n \tag{8}$$

式中

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_n = \boldsymbol{w}^0 - \boldsymbol{w}_n \tag{9}$$

ε_n 为系统的测量噪声。为了获得 PAP 算法的优化迭代步长,把(5)式中的定步长 μ 替换成 μ_n。基于(5)式和(9)式,可得变步长 PAP 算法权值误差的迭代方程

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{w}}_n - \mu_n \frac{\boldsymbol{\varphi}_n}{\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}_n}e_n \tag{10}$$

在(10)式前乘以输入信号方向向量的转置 $\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}$,可得

$$\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n - \mu_n e_n \tag{11}$$

从(5)式可以看出,PAP 算法的迭代方向是输入信号的方向向量 $\boldsymbol{\varphi}_n$,在($n+1$)时刻,最优的迭代步长使得权值误差在输入信号方向向量的方向等于 0。因此,基于(11)式,可得在 n 步的优化迭代步长等于

$$\mu_{n,\mathrm{opt}} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n}{e_n} \tag{12}$$

从(12)式可以看出,$\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n$ 的结果未知,需要采用其它的参数表示。本文为了把 $\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n$ 表示为过去误差信号的表达式,利用自回归和滑动平均 2 种模型可以相互近似地表示,仅仅是它们的阶次不同。基于文献[3]给出的计算输入信号方向向量的方法,可以把计算滑动平均输入信号模型的输入信号方向向量的方法应用到计算自回归输入信号模型的输入信号方向向量中,便于把 $\boldsymbol{\varphi}_n^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n$ 表示为过去误差信号的表达式。因此,可以把输入信号方向向量 $\boldsymbol{\varphi}_n$ 的计算表示为

$$\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}\hat{\boldsymbol{b}}_n \tag{13}$$

式中

$$\hat{\boldsymbol{b}}_n = [\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}]^{-1}\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n \tag{14}$$

定义过去 k 个输入信号方向向量组成的输入向量矩阵为

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1} = [\boldsymbol{\varphi}_{n-1} \quad \boldsymbol{\varphi}_{n-2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varphi}_{n-k}] \tag{15}$$

参数 k 表示最近过去输入的相互正交的输入信号方向向量的个数,输入向量矩阵的初始值设置为 $\hat{\boldsymbol{Z}}_0 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$。

利用输入信号方向向量 $\boldsymbol{\phi}_n$ 和输入向量矩阵相互正交的结论 $\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1} = 0$[3],在(10)式前乘以输入向量矩阵的转置 $\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}^{\mathrm{T}}$,可得

$$\hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{Z}}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n \tag{16}$$

基于(15)式和(16)式,可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\phi}_{n-\delta}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n+1} = \boldsymbol{\phi}_{n-\delta}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n;\ 1 \leqslant \delta \leqslant k\\
&\boldsymbol{\phi}_{n-1-\tau}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n = \boldsymbol{\phi}_{n-1-\tau}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-1};\ 1 \leqslant \tau \leqslant k\\
&\boldsymbol{\phi}_{n-2-\kappa}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-1} = \boldsymbol{\phi}_{n-2-\kappa}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-2};\ 1 \leqslant \kappa \leqslant k\\
&\vdots\\
&\boldsymbol{\phi}_{n-m-\gamma+1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-m+2} = \boldsymbol{\phi}_{n-m-\gamma+1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-m+1};\ 1 \leqslant \gamma \leqslant k
\end{aligned} \tag{17}$$

由(17)式递推可得

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\phi}_{n-1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\phi}_{n-2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_{n-k}^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{w}}_n =\\
&[\boldsymbol{\phi}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_n \quad \boldsymbol{\phi}_{n-2}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_{n-k}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-k+1}]
\end{aligned} \tag{18}$$

基于(11)式和(18)式,可得

$$\begin{aligned}
&[\boldsymbol{\phi}_{n-1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\phi}_{n-2}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_{n-k}^{\mathrm{T}}]\tilde{\boldsymbol{w}}_n =\\
&[\boldsymbol{\phi}_{n-1}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-1} - \mu_{n-1}e_{n-1} \quad \boldsymbol{\phi}_{n-2}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-2} - \mu_{n-2}e_{n-2}\\
&\quad \cdots \quad \boldsymbol{\phi}_{n-m}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{w}}_{n-m} - \mu_{n-k}e_{n-k}]
\end{aligned} \tag{19}$$

定义 $\hat{e}_n = \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_n$,基于(13)式和(15)式可得

$$\hat{e}_n = \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n - [\tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_{n-1} \quad \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_{n-2} \quad \cdots \quad \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_{n-k}]\hat{\boldsymbol{b}}_n \tag{20}$$

经整理,(19)式、(20)式可以重新写为

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n = \tilde{\boldsymbol{w}}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_n - &[\hat{e}_{n-1} - \mu_{n-1}e_{n-1} \quad \hat{e}_{n-2} - \mu_{n-2}e_{n-2}\\
&\cdots \quad \hat{e}_{n-k} - \mu_{n-k}e_{n-k}]\hat{\boldsymbol{b}}_n
\end{aligned} \tag{21}$$

在实际系统中,系统不可避免地受到系统测量噪声的影响。基于(8)式

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n \approx e_n - &[\hat{e}_{n-1} - \mu_{n-1}e_{n-1} \quad \hat{e}_{n-2} - \mu_{n-2}e_{n-2}\\
&\cdots \quad \hat{e}_{n-k} - \mu_{n-k}e_{n-k}]\hat{\boldsymbol{b}}_n
\end{aligned} \tag{22}$$

根据 $\hat{e}_n$ 的定义,(12)式可以写为

$$\mu_{n,\mathrm{opt}} = \frac{\hat{e}_n}{e_n} \tag{23}$$

式中:$\hat{e}_n$ 的值由(22)式给出。

因此,可得基于优化迭代步长 PAP 算法的权值更新方程

$$\boldsymbol{w}_{n+1} = \boldsymbol{w}_n + \mu_{n,\mathrm{opt}} \frac{\boldsymbol{\phi}_n}{\boldsymbol{\phi}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\phi}_n} e_n \tag{24}$$

(3)式、(4)式、(6)式、(7)式、(23)式和(24)式以一定的顺序构成了基于优化迭代步长的 PAP 算法,确保了在自适应滤波器迭代的 $(n+1)$ 步,权值误差在输入信号方向向量的方向等于 0。因此,所建立的算法促进了自适应滤波器的收敛速度和稳态性能。

3 仿真示例

假定自适应滤波器的初始估计权值向量 $\boldsymbol{w}_0 = 0$,其为 32 维的向量。信噪比设置为 60 dB,算法仿真结果的均方误差学习曲线是通过对 100 个相互独立的学习曲线求平均值而得,优化迭代步长 $\mu_{0,\mathrm{opt}}$ 的初始值等于 1。假设自适应滤波器的真实权值向量 $\boldsymbol{w}^0$ 具有最大熵,也就是说在各个方向具有相同大小的值。在本文中假定各个方向的幅值等于 1,因此可得

$$\boldsymbol{w}^0 = \boldsymbol{I} \tag{25}$$

式中: $\boldsymbol{I}$ 是一个所有元素等于 1 的 32 维向量。

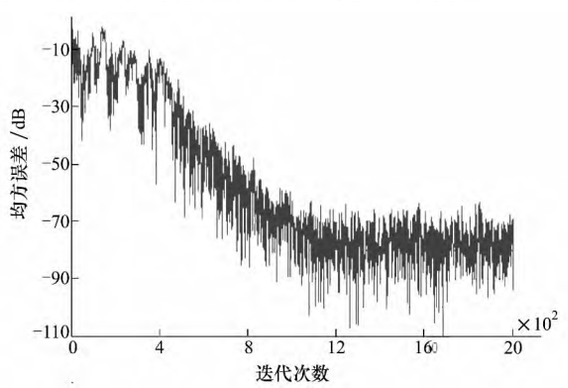


图 1 输入信号是 AR(1) 模型时所建立算法的学习曲线

示例一 输入信号是 $y_n = -0.95y_{n-1} + z_n$,其中 z_n 为均值等于 0 的高斯白噪声,选择参数 m 和 k 等于 2。图 1 给出了优化迭代步长的自适应 PAP 算法均方误差的学习曲线,从图中可以看出所建立算法的收敛速度比较快,稳态误差比较小。

示例二 输入的信号是 $y_n = z_n + 0.95z_{n-1} - 0.4z_{n-3} - 0.95y_{n-1}$,选择参数 $m = 3$ 和 $k = 3$。图 2 给出了优化迭代步长的自适应 PAP 算法均方误差的学习曲线,从图中可以看出所建立的算法促进了自适应滤波器的收敛速度,同时获得了比较好的稳态性能。

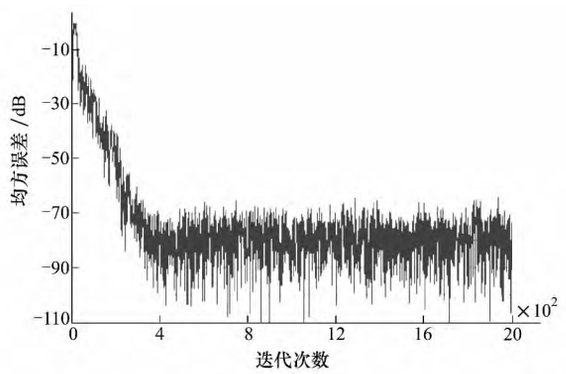


图 2 输入信号是 ARMA(1,3) 模型时所建立算法的学习曲线

4 结 论

通过分析 PAP 算法在输入信号方向向量上权值误差引起的估计输出误差信号,使得权值误差在输入信号方向向量的误差等于 0,结合 OD 算法定义的输入信号方向向量,利用自回归模型和滑动平均模型可以相互近似表示的原理,获得了 PAP 算法的优化迭代步长。仿真结果表明: 相比较于 PAP 算法,本文提出的算法促进了自适应滤波器的收敛性和失调量。

参考文献:

[1] Haykin S. Adaptive Filter Theory [M]. 4nd Ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002

[2] Ozeki K, Umeda T. An Adaptive Filtering Algorithm Using an Orthogonal Projection to an Affine Subspace and Its Properties [J]. Electronics and Communication in Japan, 1984, 67-A(5): 19-27

[3] Rupp M. A Family of Adaptive Filter Algorithms with Decorrelating Properties [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1998, 46(3): 771-775

[4] Sankaran S G, Louis Beex A A. Fast Generalized Affine Projection Algorithm [J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2000, 14(6): 623-641

[5] Bouteille F, Scalart P, Corazza M. Pseudo Affine Projection Algorithm New Solution for Adaptive Identification [C] // Proceeding of Eurospeech, 1999, 427-430

[6] Almeida S J M D, Bermudez J C M, Bershad N J. A Stochastic Model for a Pseudo Affine Projection Algorithm [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(1): 107-118

[7] Fan Y, Zhang J. Variable Step-Size Affine Projection Algorithm with Exponential Smoothing Factors [J]. Electronics Letters, 2009, 45(17): 911-912

[8] 智永锋,范蟠果,张骏,邓正宏,张怡.自适应增益 APA-AG 算法的研究 [J].西北工业大学学报,2011,29(3): 449-453
Zhi Yongfeng, Fan Panguo, Zhang Jun, Deng Zhenghong, Zhang Yi. A Better Affine Projection Algorithm Using Adaptive Gain [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2011, 29(3): 449-453 (in Chinese)

[9] Zhi Yongfeng, Zhang Jun, Li Yinxue.Steady-State Weights Solution to Affine Projection Algorithm [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2012, 10(2): 259-263

[10] 智永锋,李虎雄,李茹. 一种基于回归估计误差仿射投影算法的统计特性分析 [J]. 自动化学报,2013, 39(3): 244-250
Zhi Yongfeng, Li Huxiong, Li Ru. Statistical Analysis of Affine Projection Using Regressive Estimated Error Algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(3): 244-250 (in Chinese)

[11] 智永锋,郑曦,邓正宏,李茹,张骏.一种变步长 AP-REE 算法的研究 [J]. 西北工业大学学报,2013, 31(2): 183-188
Zhi Yongfeng, Zheng Xi, Deng Zhenghong, Li Ru, Zhang Jun. A Better Variable Step-Size Affine Projection Algorithm Using Regressive Estimated Error [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2013, 31(2): 183-188 (in Chinese)

Research on Optimal Step Size Based on Pseudo Affine Projection Algorithm

Zheng Xi, Zhi Yongfeng, Zhang Jun

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aiming to improve the performance of adaptive filtering, we present a pseudo affine projection (PAP) algorithm with variable step size. Setting the weight error to be zero in the direction vector and using the orthogonal direction algorithm, we obtain the optimal step size for the PAP algorithm. The simulation results and their analysis show preliminarily that the PAP algorithm with the optimal step-size improves the adaptive filtering convergence and misadjustment.

Key words: adaptive filtering, algorithms, computer simulation, convergence of numerical methods, identification, affine projection, optimal step size